الرياضيات

البحتة

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب — الفصل الدراسى الثانى

القسم العلمي

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح — أ/ سير افيم إلياس إسكندر

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى — أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

SAKKARA PUBLISHING

الطبعــة الأولى ٢٠١٥/ ٢٠١٦
رقم الإيــداع ١٠٥٥٨ / ٢٠١٥
الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 015 - 8

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب ثلاث مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى
المتتابعات والمتسلسلات

١ - ١ المتتابعات. ٤
١ - ٢ المتسلسلات ورمز المجموع. ١٠
١ - ٣ المتتابعات الحسابية. ١٤
١ - ٤ المتسلسلات الحسابية. ٢١
١ - ٥ المتتابعات الهندسية. ٢٩
١ - ٦ المتسلسلات الهندسية. ٣٧
ملخص الوحدة. ٤٦
تمارين عامة. ٤٨
اختبار تراكمي. ٥٠

الوحدة الثانية
التباديل والتوافيق

٢ - ١ مبدأ العد. ٥٤
٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل. ٥٧
٢ - ٣ التوافيق. ٦٢
ملخص الوحدة. ٦٦
تمارين عامة. ٦٧
اختبار تراكمي. ٦٨

المحتويات

الوحدة الثالثة
التفاضل والتكامل

٣ - ١ معدل التغير. ٧٢
٣ - ٢ الاشـــتقاق. ٨٠
٣ - ٣ قواعد الاشتقاق. ٨٦
٣ - ٤ مشتقات الدوال المثلثية. ٩٣
٣ - ٥ تطبيقات على المشتقة. ٩٩
٣ - ٦ التكامل. ١٠٥
ملخص الوحدة. ١١٣
تمارين عامة. ١١٥
اختبار تراكمي. ١١٧

الوحدة الرابعة
حساب المثلثات

٤ - ١ زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلثات). ١٢٠
٤ - ٢ الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين. ١٢٩
٤ - ٣ الدوال المثلثية لضعف الزاوية. ١٣٦
٤ - ٤ صيغة هيرون. ١٤٣
ملخص الوحدة. ١٤٩
تمارين عامة. ١٥٠
اختبار تراكمي. ١٥٢
اختبارات عامة. ١٥٣
إجابات. ١٦٣

اختبارات وإجابات



الوحدة
الأولى

المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and series

مقدمة الوحدة

فيبوناتشي (Fibonacci) (١١٧٠ م ١٢٥٠ م)

ولد ليوناردو فيبوناتشي في مدينة بيزا بإيطاليا. وكان تعليمه بالأساس في دول المغرب العربى، وقد جلب الأرقام العربية والأسس الجبرية المستعملة حتى اليوم، وقد قام بتعريف الأوروبيين أنظمة الحساب والكتابة العربية التى فاقت بمراحل النظم الرومانية المنتشرة آنذاك في أوروبا، وقد اشتهر أساسًا بمسألة تقودنا إلى متتابعة الأعداد الآتية والتى تُعرف باسمه حتى الآن وهى:

(١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ٣٤، ٥٥، ٨٩، ١٤٤،.....)

ويلاحظ أن كل عدد بداية من العدد الثالث هو ناتج من مجموع العددين السابقين له مباشرة، وتتحدد قاعدة هذه المتتابعة كالآتى:

$ع_{ن+٢} = ع_{ن+١} + ع_{ن}$ ، لكل ن $\in$ صـ$^{+}$

وقد استخدمت أعداد فيبوناتشي فى تحليل الأسواق المالية، وفي خوارزميات الكمبيوتر مثل تقنية فيبوناتشي للبحث وهيكلة بيانات تكدس فيبوناتشي وهي تظهر أيضا في الترتيبات البيولوجية، مثل تفريعات الأشجار، ترتيب الأوراق على الساق وترتيب مخروط الصنوبر... إلخ .

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم المتتابعة.
- يميز بين المتتابعة والمتسلسلة.
- يتعرف المتتابعة الحسابية.
- يستنتج الحد العام للمتتابعة الحسابية بصور مختلفة .
- يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية.
- يتعرف المتسلسلة المنتهية وغير المنتهية
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة.
- يتعرف المتتابعة الهندسية.
- يستنتج الحد العام للمتتابعة الهندسية.
- يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية.
- يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.
- يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.
- يوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية
- يحول الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادي.
- يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل المشكلة السكانية.
- يحل تطبيقات حياتية على المتسلسلات.
- يستخدم الحاسبات فى حل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام المتتابعات والمتسلسلات.

المصطلحات الأساسية

Function	دالة	Summation Notation	رمز التجميع	Common Ratio	أساس المتتابعة الهندسية
Term	حد	Arithmetic Sequence	متتابعة حسابية	Geometric Means	أوساط هندسية
Finite Sequence	متتابعة منتهية	Common Difference	أساس المتتابعة الحسابية	Geometric Series	متسلسلة هندسية
Infinite Sequence	متتابعة غير منتهية	Arithmetic Means	أوساط حسابية	Infinite Geometric Series	متسلسلة هندسية غير منتهية
Increasing Sequence	متتابعة تزايدية	Arithmetic Series	متسلسلة حسابية	Infinity	مالانهاية
Decreasing Sequence	متتابعة تناقصية	Geometric Sequence	متتابعة هندسية		
Series	متسلسلة				

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): المتتابعات.

الدرس (١ - ٢): المتسلسلات ورمز المجموع.

الدرس (١ - ٣): المتتابعات الحسابية.

الدرس (١ - ٤): المتسلسلات الحسابية.

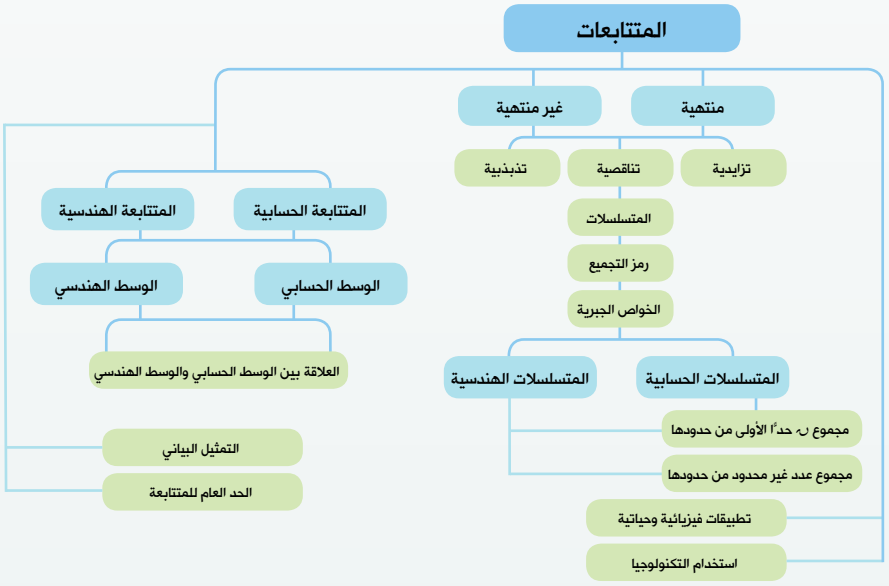
الدرس (١ - ٥): المتتابعات الهندسية.

الدرس (١ - ٦): المتسلسلات الهندسية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية.

مخطط تنظيمي للوحدة



١ - ١ المتتابعات

Sequences

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة.
- المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية.
- الحد النونى للمتتابعة.
- المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية.

المصطلحات الأساسية

- متتابعة Sequence
- متتابعة منتهية Finite Sequence
- متتابعة غير منتهية Infinite Sequence
- حد Term
- متتابعة تزايدية Increasing Sequence
- متتابعة تناقصية Decreasing Sequence
- متتابعة ثابتة Constant Sequence

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- برامج رسومية

تمهيد:

درست سابقًا الأنماط (مثل: ١، ٣، ٥، ٧، ...) وتعلمت أن النمط العددى هو ترتيب من مجموعة من الأعداد الحقيقية . وفى هذه الوحدة نلقى الضوء على بعض هذه الأنماط ونتناولها بدراسة أكثر عمقًا.

فكر و ناقش

ادرس النمط الآتى ثم أجب عن الأسئلة: (١، ٤، ٧، ١٠، ...)

١) ما العلاقة بين كل حد والذى يليه؟

٢) هل يمكنك إيجاد الحدين التاليين فى النمط؟

٣) هل يمكنك إيجاد الحد التاسع فى هذا النمط (دون الحاجة إلى إيجاد الحدود السابقة له)؟

تذكر أن

الدالة هى علاقة بين مجموعتين س، ص بحيث كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.

تعلم

تعريف ١

المتتابعة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص^+$ أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ع حيث يرمز للحد الأول بالرمز $ع_١$، الحد الثانى بالرمز $ع_٢$، الحد الثالث بالرمز $ع_٣$ وهكذا... والحد النونى بالرمز $ع_ن$ ويمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالآتى:

$(ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ ، ... ، ع_ن)$

أو يرمز لها بالرمز $(ع_ن)$.

لاحظ أن

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.

(٢) الرمز $(ع_ن)$ يعبر عن المتتابعة بينما الرمز $ع_ن$ يعبر عن حدها النونى.

(٣) المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها (حدودها) بينما المجموعة لا تخضع لترتيب عناصرها.

(٤) عناصر المجموعة لا تتكرر بينما عناصر المتتابعة قد تتكرر.

تعريف:

المتتابعة المنتهية و المتتابعة غير منتهية

Finite and Infinite Sequences

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيا (أى يمكن حصره أو عده) وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (عدد لا نهائى من العناصر).

مثال

(١) اكتب كلًّا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

أ $ع_ن = ن^2 - ١$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول)

ب $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن + ١}$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول)

الحل

أ بوضع ن = ١ فإن $ع_١ = (١)^2 - ١ = ٠$ ، بوضع ن = ٢ فإن $ع_٢ = (٢)^2 - ١ = ٣$ ،

بوضع ن = ٣ فإن $ع_٣ = (٣)^2 - ١ = ٨$ ، بوضع ن = ٤ فإن $ع_٤ = (٤)^2 - ١ = ١٥$ ،

بوضع ن = ٥ فإن $ع_٥ = (٥)^2 - ١ = ٢٤$

المتتابعة هى: (٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤)

ب بوضع ن = ١ فإن $ع_١ = \frac{(-١)^١}{١ + ١ \times ٢} = \frac{-١}{٣}$ ، بوضع ن = ٢ فإن $ع_٢ = \frac{(-١)^٢}{١ + ٢ \times ٢} = \frac{١}{٥}$ ،

بوضع ن = ٣ فإن $ع_٣ = \frac{(-١)^٣}{١ + ٣ \times ٢} = \frac{-١}{٧}$ ، بوضع ن = ٤ فإن $ع_٤ = \frac{(-١)^٤}{١ + ٤ \times ٢} = \frac{١}{٩}$ ،

بوضع ن = ٥ فإن $ع_٥ = \frac{(-١)^٥}{١ + ٥ \times ٢} = \frac{-١}{١١}$

المتتابعة هى: $(\frac{-١}{٣} ، \frac{١}{٥} ، \frac{-١}{٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{-١}{١١} ،)$ **وتسمى المتتابعة فى هذه الحالة بالمتتابعة التذبذبية (أى أحد حدودها موجب والآخر سالب أو العكس).**

حاول أن تحل

(١) اكتب كلا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

أ $ع_ن = ١ + \sqrt[ن]{٢}$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

ب $ع_ن = جا \frac{\pi}{ن}$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).

الحد العام للمتتابعة

General Term of a Sequence

الحد العام للمتتابعة (ويسمى أحيانا بالحد النونى) ويكتب $ع_ن$ حيث $ع_ن$ صورة العنصر الذى ترتيبه ن ويمكن استنتاجه أحيانا من خلال حدود معطاة للمتتابعة، وذلك بإدراك العلاقة بين قيمة الحد ورتبته.

مثال ذلك:

- الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية: (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...) هو $ع_ن = ٢ن$
- الحد العام لمتتابعة الأعداد الفردية: (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) هو $ع_ن = ٢ن - ١$
- الحد العام للمتتابعة: $(\frac{-١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٥} ، \frac{١}{٦} ،)$ هو $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٢}$

مثال

(٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى وكذلك الحد العام للمتتابعة $(ع_ن)$ المعرفة كالآتى:

$ع_١ = ٢$ ، $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$ حيث $ن \geq ١$

الحل

بالتعويض عن قيمة ن = ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فى العلاقة ع$_{ن+١}$ = ٢ ع$_{ن}$

بوضع ن = ١ ع$_{٢}$ = ٢ ع$_{١}$ أى أن: ع$_{٢}$ = ٢ × **٢** = ٤ = ٢^{٢} (بالتعويض عن ع$_{١}$ = ٢)

بوضع ن = ٢ ع$_{٣}$ = ٢ ع$_{٢}$ أى أن: ع$_{٣}$ = ٢ × **٤** = ٨ = ٢^{٣} (بالتعويض عن ع$_{٢}$ = ٤)

بوضع ن = ٣ ع$_{٤}$ = ٢ ع$_{٣}$ أى أن: ع$_{٤}$ = ٢ × **٨** = ١٦ = ٢^{٤} (بالتعويض عن ع$_{٣}$ = ٨)

بوضع ن = ٤ ع$_{٥}$ = ٢ ع$_{٤}$ أى أن: ع$_{٥}$ = ٢ × **١٦** = ٣٢ = ٢^{٥} (بالتعويض عن ع$_{٤}$ = ١٦)

الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هى: (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢)

الحد العام للمتتابعة (ع$_{ن}$) هو: ع$_{ن}$ = ٢^{ن}

أضف إلى معلوماتك

بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الآن مثل متتابعة الأعداد الاولية
(٢، ٣، ٥، ٧،)

فكر:

١- كيف يمكنك التحقق من صحة الحل السابق؟

حاول أن تحل

(٢) اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث: ع$_{ن+٢}$ = ع$_{ن+١}$ + ع$_{ن}$ حيث ن ≥ ١ ، ع$_{١}$ = ٢ ، ع$_{٢}$ = ٣

المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية:

Increasing and Decreasing Sequences

تأمل المتتابعات الآتية:

(١) (- ٥ ، - ١ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ،) (ماذا تلاحظ)

(٢) (٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ،) (ماذا تلاحظ)

- **فى المتتابعة الأولى:** - ١ > - ٥ أى أن ع$_{٢}$ > ع$_{١}$ ، ٣ > - ١ أى أن ع$_{٣}$ > ع$_{٢}$ وهكذا بالنسبة لبقية الحدود، أى أن كل حد من حدود المتتابعة أكبر من الحد السابق له مباشرة.
- **وفى المتتابعة الثانية:** ٢ > ٤ أى أن ع$_{٢}$ > ع$_{١}$ ، ١ > ٢ أى أن ع$_{٣}$ > ع$_{٢}$ وهكذا أى أن كل حد من حدود المتتابعة أصغر من الحد السابق له مباشرة.

تعريف:

- تسمى المتتابعة (ع$_{ن}$) **تزايدية** إذا كان ع$_{ن+١}$ > ع$_{ن}$
- تسمى المتتابعة (ع$_{ن}$) **تناقصية** إذا كان ع$_{ن+١}$ < ع$_{ن}$

أضف إلى معلوماتك

المتتابعة الثابتة:
جميع حدودها متساوية أى: ع$_{ن}$ = أ وقد تكون منتهية أو تكون غير منتهية.

مثال

(٣) بين أيًّا من المتتابعات (ع$_{ن}$) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك.

أ ع$_{ن}$ = ٢ن + ٣ ب ع$_{ن}$ = $\frac{١}{٣ن - ١}$ ج ع$_{ن}$ = $\frac{(-١)^{ن}}{٢ن}$ + ٤

الحل

أ **نوجد** $ع_{ن+١}$ كالآتى: $ع_{ن+١} = ٢(ن + ١) + ٣ = ٢ن + ٥$

نوجد ناتج: $ع_{ن+١} - ع_{ن}$: $ع_{ن+١} - ع_{ن} = (٢ن + ٥) - (٢ن + ٣) = ٢ > ٠$

$ع_{ن+١} > ع_{ن}$ أى أن المتتابعة **تزايدية لجميع قيم ن**

ب **نوجد** $ع_{ن+١}$ كالآتى: $ع_{ن+١} = \frac{١}{٣(ن + ١) - ١} = \frac{١}{٣ن + ٢}$

نوجد ناتج: $ع_{ن+١} - ع_{ن}$: $ع_{ن+١} - ع_{ن} = \frac{١}{٣ن + ٢} - \frac{١}{٣ن - ١} = \frac{٣ن - ١ - ٣ن - ٢}{(٣ن + ٢)(٣ن - ١)} = \frac{-٣}{(٣ن + ٢)(٣ن - ١)} < ٠$

$ع_{ن+١} < ع_{ن}$ أى أن المتتابعة **تناقصية لجميع قيم ن**

جـ $ع_{ن+١} - ع_{ن} = \frac{(-١)^{ن+١}}{٢(ن+١)} - \frac{(-١)^{ن}}{٢ن} = \frac{(-١)^{ن+١}}{٢(ن+١)} + \frac{(-١)^{ن+١}}{٢ن}$

$= (-١)^{ن+١}[\frac{١}{٢(ن+١)} + \frac{١}{٢ن}] = (-١)^{ن+١}[\frac{ن + ن + ١}{٢ن(ن+١)}]$

$= (-١)^{ن+١}[\frac{٢ن + ١}{٢ن(ن+١)}]$

وهذا المقدار موجب عندما ن عدد فردى وسالب عندما ن عدد زوجى أى أن المتتابعة ليست تزايدية ولا تناقصية.

حاول أن تحل

(٣) بين أيًّا من المتتابعات $(ع_{ن})$ تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك.

أ $ع_{ن} = ٣ - \frac{٢}{ن}$ ب $ع_{ن} = (\frac{١}{٢})^{ن}$ جـ $ع_{ن} = (-٢)^{ن}$

تمـارين (١ - ١)

أكمل ما يأتى:

(١) المتتابعة هى دالة مجالها هو أ،

(٢) الحد السابع للمتتابعة $(ع_{ن})$ حيث $ع_{ن} = ٢ن^{٢} + ٣$ هو

(٣) الحد الرابع فى للمتتابعة $(ع_{ن})$ حيث $ع_{ن} = \frac{\sqrt{ن}}{ن+١}$ هو

(٤) فى المتتابعة $(ع_{ن})$ حيث $ع_{ن+١} = ن\ ع_{ن}$ حيث $ن \geq ١$ إذا كان $ع_{١} = ١$ فإن $ع_{٢} =$

(٥) فى المتتابعة $(ع_{ن})$ حيث $ع_{ن} = ٣ن^{٢} - ١$ إذا كان $ع_{ن} = ٧٤$ فإن ن = ...

(٦) الحد النونى للمتتابعة (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ،) هو

(٧) الحد النونى للمتتابعة (-١ ، ٤ ، -٩ ، ١٦ ،) هو

أكمل ما يأتى باستخدام أحد الرموز: > أ ، < أ ، =

(٨) تكون المتتابعة تناقصية إذا كان: $ع_{ن+١}$ $ع_{ن}$ لكل ن ⩾ ١

(٩) تكون المتتابعة ثابتة إذا كان: $ع_{ن+١}$ $ع_{ن}$ لكل ن ⩾ ١

(١٠) تكون المتتابعة تزايدية إذا كان: $ع_{ن+١}$ $ع_{ن}$ لكل ن ⩾ ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) المتتابعة التى حدها النونى $ع_{ن} = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث ن ∈ صـ$^{+}$ تمثل:

أ متتابعة تزايدية ب متتابعة تناقصية ج متتابعة ثابتة د متتابعة تذبذبة

(١٢) الحد العام للمتتابعة ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ،) هو

أ (ن − ١)(ن + ١) ب ن(ن + ١) ج ٢ن(ن + ١) د (ن + ١)(ن + ٢)

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٣) بين المتتابعات الآتية إذا كانت منتهية أو غير منتهية:

أ (١ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ،)

ب (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ، ٢١)

ج المتتابعة $(ع_{ن})$ حيث $ع_{ن} = ن^{٢} - ١$ ، ن ∈ صـ$^{+}$

د المتتابعة $(ع_{ن})$ حيث $ع_{ن} = \frac{٢}{ن} + ٣$ ، ن ∈ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

(١٤) اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:

أ $ع_{ن} = ن + ن^{٢}$ ب $ع_{ن} = \frac{١}{٥ - ٢ن}$ ج $ع_{ن} = (\frac{١}{٣})^{ن}$

د $ع_{ن} = جا(\frac{ن}{٤}\pi)$ هـ $ع_{ن} = (-١)^{ن}(ن - ٢)^{٢}$ و $ع_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{ن^{٢}}$

(١٥) اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية:

أ (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ،) ب (١/٢ ، ٢/٣ ، ٣/٤ ، ٤/٥ ،)

ج (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ،) د (١ ، ١/١٠ ، ١/١٠٠ ، ١/١٠٠٠ ،)

هـ (-١ ، ٢ ، -٤ ، ٨ ، -١٦ ،)

و (جتا π/٣ ، جتا ٢π/٣ ، جتا π ، جتا ٤π/٣ ،)

(١٦) بين أيًّا من المتتابعات $(ع_{ن})$ تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك فى كل مما يأتى:

أ $ع_{ن} = ٣ن + ٥$ ب $ع_{ن} = \frac{١}{ن} + ٢$

ج $ع_{ن} = (\frac{١}{٢})^{ن+١}$ د $(-١)^{ن}(ن^{٢} + ١)$

(١٧) **الربط بالرياضة:** يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق فى اليوم الأول ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يوميا.

أ اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

ب أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.

جـ أوجد الزمن الذى يستغرقه كريم فى اليوم السابع.

د فى أى يوم سيكون الزمن الذى يستغرقه كريم نصف ساعة؟ وضح إجابتك.

(١٨) **اكتشف الخطأ:**

أ كل دالة مجالها صـ هى متتابعة.

ب كل دالة مجالها {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...} هى متتابعة غير منتهية.

جـ فى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ن^2$ يكون $ع_ن < ع_{ن+١}$

(١٩) **تفكير إبداعى:** فى المتتابعة $(ع_ن)$ إذا كان $ع_١ = ٩$ ، $ع_٣ = ٣٦$ ، $ع_{ن+١} = ع_ن + ن$ س أوجد قيمة س.

نشاط

١- إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حدودها (١، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ،).

أ ادرس نمط المتتابعة ثم أوجد الحدين الثامن والتاسع.

ب مثل التسعة حدود الأولى من المتتابعة بيانيًا.

جـ هل نعتبر أن هذه المتتابعة تزايدية أم تناقصية أم غير ذلك؟ فسِّر إجابتك.

د اكتب العلاقة بين حدود هذه المتتابعة.

هـ ابحث فى الشبكة العنكبوتية وبالموقع (www.go.hrw.com Fibonacci) عن معلومات وأمثلة تمثل متتابعة فيبوناتشى.

١ - ٢ المتسلسلات ورمز التجميع

Series and Summation Notation

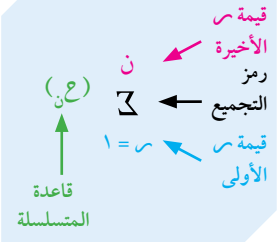
سوف تتعلم

سوف تتعلم:
- مفهوم المتسلسلة.
- المتسلسلة المنتهية.
- المتسلسلة غير المنتهية.
- الخواص الجبرية للتجميع.

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة Series
- متسلسلة منتهية Finite Series
- متسلسلة غير منتهية Infinite Series
- رمز التجميع Summation Notation

تذكر أن



الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

في لغتنا اليومية نستخدم الكلمتين "**المتتابعة**" و "**المتسلسلة**" كمترادفين، وعلى الرغم من وجود ترابط بينهما فى المعنى، فإن هناك فرقًا بينهما فى الرياضيات فالمتتابعة هى عبارة عن قائمة مرتبة من الأعداد فى حين أن المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة.

فمثلا: (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) هى متتابعة بينما ٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ... هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة، ويمكن استخدام رمز التجميع "Σ" ويقرأ (سيجما) لكتابة المتسلسلات بصور مختصرة.

تعلم

تعريف

المتسلسلة المنتهية: *Finite Series*

تكتب بالصورة: ع١ + ع٢ + ع٣ + ... + عر + ... + عن حيث ن عدد صحيح موجب، عن هو الحد الذى ترتيبه ن فى المتسلسلة وتسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهية بمجموع حدود المتتابعة المناظرة

ففى المتسلسلة المنتهية: أ١ + أ٢ + أ٣ + ... + أر ... + أن

يمكن كتابتها بالصورة $\sum_{ر=١}^{ن}$ (أر) وتقرأ مجموع أر من ر = ١ إلى ر = ن

مثال

١ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك.

أ $\sum_{ر=١}^{٤}$ (ر٢) ب $\sum_{ر=١}^{٧}$ (٢ر - ١) ج $\sum_{ر=١}^{ن}$ $(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١})$

الحل

أ $\sum_{ر=١}^{٤}$ (ر٢) = ١٢ + ٢٢ + ٣٢ + ٤٢ = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٣٠

ب $\sum_{ر=١}^{٧}$ (٢ر - ١) = (٢ × ١ - ١) + (٢ × ٢ - ١) + (٢ × ٣ - ١) + (٢ × ٤ - ١) +

(٢ × ٥ - ١) + (٢ × ٦ - ١) + (٢ × ٧ - ١)

= ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ = ٤٩

ج $\sum_{ر=١}^{ن}$ $(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١})$ = $(\frac{١}{١} - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + ... + (\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١})$

= ١ - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{٤}$ + ... + $\frac{١}{ن}$ - $\frac{١}{ن+١}$

= ١ - $\frac{١}{ن+١}$ = $\frac{١ - ن - ١}{ن+١}$ = $\frac{-ن}{ن+١}$

حاول أن تحل

(١) اكتب المتسلسلة فى شكل المفكوك ثم أوجد مجموعها:

أ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر^{٢})$ ب $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ر + ٢)$ ج $\sum_{ر=١}^{ن} (\frac{١}{ر + ١} - \frac{١}{ر + ٢})$

المتسلسلة غير المنتهية: *Infinite Series*

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها **فمثلا المتسلسلة:** $- ٣ + ٩ - ٢٧ + ٨١ - ٢٤٣ + ...$

تكتب بالصورة $\sum_{ر=١}^{\infty} (-٣)^{ر}$ وقد استخدم الرمز ∞ للدلالة على ذلك.

مثال

(٢) استخدم رمز التجميع Σ فى كتابة المتسلسلة: $٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + ...$

الحل

∵ الحد العام للمتتابعة هو: $ع_ر = (ر + ١)(ر + ٢)$ حيث $ر \in صـ^{+}$

∴ $٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + ... = \sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ١)(ر + ٢)$

حاول أن تحل

(٢) استخدم رمز التجميع Σ فى كتابة المتسلسلة: $١ \times ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ \times ٥ + ٥ \times ٦ \times ٧ + ...$

الخواص الجبرية للتجميع: *Algebraic Properties of Summation*

١ - إذا كانت $(ع_ر)$ ، $(هـ_ر)$ متتابعتين ، $ن \in صـ^{+}$ ، $جـ \in ع$ فإن:

أ $\sum_{ر=١}^{ن} جـ = جـ ن$ ب $\sum_{ر=١}^{ن} أ ع_ر = أ \sum_{ر=١}^{ن} ع_ر$

ج $\sum_{ر=١}^{ن} (ع_ر \pm هـ_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ع_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} هـ_ر$

٢ - $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

مثال

(٣) أوجد بطريقتين مختلفتين $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ر + ر^{٢})$

الحل

١ - الطريقة الأولى (التعويض المباشر)

$\sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ر + ر^{٢}) = (٣ - ٢ \times ١ + ١^{٢}) + (٣ - ٢ \times ٢ + ٢^{٢}) + (٣ - ٢ \times ٣ + ٣^{٣}) + (٣ - ٢ \times ٤ + ٤^{٢})$

$= ٢ + ٣ + ٦ + ١١ = ٢٢$



٢ - الطريقة الثانية (استخدام الخواص الجبرية للتجميع)

$$\sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ر + ر^{٢}) = \sum_{ر=١}^{٤} ٣ - \sum_{ر=١}^{٤} ٢ر + \sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢}$$

$$= ٣ \times ٤ - ٢ \times \frac{٤(٤+١)}{٢} + \frac{٤(٤+١)(٢ \times ٤+١)}{٦}$$

$$= ١٢ - ٢ \times \frac{٤ \times ٥}{٢} + \frac{٤ \times ٥ \times ٩}{٦}$$

$$= ١٢ - ٢٠ + ٣٠ = ٢٢$$

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد ناتج المتسلسلة:

Using the Scientific Calculator to Find the Result of a Series

- نضغط على مفتاح رمز التجميع Σ حسب اللون المحدد لذلك.
- نكتب قاعدة المتتابعة $(٣ - ٢ر + ر^{٢})$ مثلا كالآتي:

χ^2 (×)) ALPHA + (×)) ALPHA 2 − 3

- نستخدم المفتاح (REPLAY) للتنقل كالآتي:
- لأعلى نكتب 4 ولأسفل نكتب 1
- نضغط على المفتاح = ليعطى على الشاشة الناتج ٢٢



٩ حاول أن تحل

(٣) أوجد بطريقتين: $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^{٢} - ٣ر + ٥)$ علما بأن:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢} \quad ، \quad \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

تمـارين (١ - ٢)

(١) أكمل ما يأتي:

أ المتسلسلة: ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ... + ٥٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة

ب المتسلسلة: ٧ × ١ + ٧ × ٢ + ٧ × ٣ + ... + ٧ × ٢٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة

ج المتسلسلة: $-\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦}$ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة

د المتسلسلة: ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ... إلى ن حدًّا، تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة

(٢) اكتب المتسلسلات التالية مستخدما رمز التجميع:

أ ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ٢٠

ب ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ... + ٦٠

ج ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨ + ٢١

د ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ...

هـ ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ... + ٦٤

و $\frac{١}{٥}$ + $\frac{١}{١٠}$ + $\frac{١}{١٥}$ + $\frac{١}{٢٠}$ + ... + $\frac{١}{٥٠}$

٣ اكتب مفكوك كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

أ $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢)$

ب $\sum_{ر=١}^{٨} ((-١)^{ر} + ٤ر)$

ج $\sum_{ر=١}^{\infty} \left((\frac{١}{٢})^{ر} - ١\right)$

د $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١})$

٤ إذا علمت أن $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$ ، فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$ قيمة كل مما يأتي:

أ $\sum_{ر=٨}^{١٢} ٢(ر + ٥)$

ب $\sum_{ر=٥}^{٨} (٢ر^{٢} - ٣ر)$

٥ **اكتشف الخطأ:**

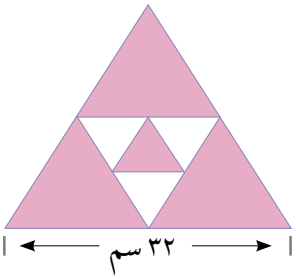
أ المتسلسلة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها.

ب $\sum_{ر=٠}^{٥} (٢ر + ١) = ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩$

٦ **الربط بالتعدين:** منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب ويتناقص بمعدل ١٠ ٪ سنويًّا من إنتاج العام السابق له مباشرة؟

➢ اكتب باستخدام رمز التجميع مجموع إنتاج المنجم خلال السنوات الخمس الأولى، ثم أوجد هذا المجموع.

٧ **الربط بالهندسة:** يمثل الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع، طول ضلعه ٣٢ سم، نصفت أضلاعه الثلاثة، ورسم المثلث الداخلى واستمر هذا النمط نحو الداخل حتى حصلنا على ثلاثة مثلثات بما فيها المثلث الأول.



أ اكتب متسلسلة محيطات المثلثات باستخدام رمز التجميع .

ب أوجد بالسنتيمترات مجموع محيطات جميع المثلثات التى حصلنا عليها.

٨ **الربط بالتكنولوجيا:** أرسل كريم بالبريد الإلكترونى رسالة إلى ثلاثة من أصدقائه، ومن ثم قام كل منهم بإرسال نفس الرسالة إلى ثلاثة أصدقاء آخرين، وهكذا استمر إرسال الرسالة نفسها بهذا النمط (علما بأن كل شخص استلم هذه الرسالة مرة واحدة فقط)



أ اكتب المتسلسلة باستخدام رمز التجميع.

ب أوجد عدد الأشخاص الذين ستصلهم هذه الرسالة فى المرحلة الخامسة.

ج أوجد مجموع جميع الأشخاص الذين تداولوا هذه الرسالة.

١ - ٣ المتتابعة الحسابية

Arithematic Sequencies

سوف تتعلم

سوف تتعلم:
- تعريف المتتابعة الحسابية.
- التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية.
- الحد النونى للمتتابعة الحسابية.
- تعيين المتتابعة الحسابية
- تعريف الوسط الحسابى.
- إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين.

المصطلحات الأساسية
- متتابعة حسابية Arithematic Sequencies
- حد نونى The n^{th} Term
- أساس المتتابعة الحسابية. Commen Difference
- رتبة الحد . The Order of a Term
- وسط حسابى. Arithmetic Mean

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- برامج رسومية

بدأت دعاء فى قراءة إحدى الروايات فقرأت فى اليوم الأول ١٠ صفحات وقرأت فى اليوم الثانى ١٥ صفحة وقرأت فى اليوم الثالث ٢٠ صفحة، فإذا استمرت فى القراءة بهذا النمط فإن متتابعة عدد الصفحات المقروءة في كل يوم هى: (١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ...)



ماذا تلاحظ فى هذه المتتابعة؟

تعريف

المتتابعة الحسابية: *Arithematic Sequence*

هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدرًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة و يرمز له عادة بالرمز (ء)

أى أن: $ء = ع_{ن+١} - ع_{ن}$ لكل ن ∈ صـ$^{+}$

مثال

(١) أىٌّ من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

أ (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩)

ب (٢٧ ، ٢٣ ، ١٩ ، ١٥ ، ١١ ،)

ج $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦})$

الحل

أ ∵ $ع_{٢} - ع_{١} = ١٠ - ٧ = ٣$ ، $ع_{٣} - ع_{٢} = ١٣ - ١٠ = ٣$ ،

∴ $ع_{٢} - ع_{١} = ع_{٣} - ع_{٢} = ع_{٤} - ع_{٣} = ع_{٥} - ع_{٤} = ٣$

∴ المتتابعة حسابية أساسها = ٣

ب ∵ $ع_{٢} - ع_{١} = ٢٣ - ٢٧ = -٤$ ، $ع_{٣} - ع_{٢} = ١٩ - ٢٣ = -٤$ ،

∴ $ع_{٢} - ع_{١} = ع_{٣} - ع_{٢} = ع_{٤} - ع_{٣} = ع_{٥} - ع_{٤} = -٤$

∴ المتتابعة حسابية أساسها = − ٤

ج ∵ $ع_{٢} - ع_{١} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٦}$ ، $ع_{٣} - ع_{٢} = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} = -\frac{١}{١٢}$

∴ $ع_{٢} - ع_{١} \neq ع_{٣} - ع_{٢}$

∴ المتتابعة ليست حسابية

أضف إلى معلوماتك

المتتابعة التوافقية (Harmonic Sequence)

تسمى المتتابعة توافقية إذا كان مقلوبات حدودها تكون متتابعة حسابية مثل المتتابعة $(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٧} ،)$

حاول أن تحل

(١) أيٌّ من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

أ (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨ ، ...) ب (- ١٤ ، - ٨ ، - ٢ ، ٤ ، ١٠) ج (٢٣ ، ٢٨ ، ٣٣ ، ٣٨ ، ٤٢)

مثال

(٢) بين أيًّا من المتتابعات التى يعطى حدها النونى بالعلاقات الآتية تكون حسابية، ثم أوجد أساسها في حال كونها حسابية.

أ $ع_ن = ٢ن + ٣$ ب $ع_ن = \frac{٣}{ن} + ٢$

الحل

أ $\because ع_{ن+١} - ع_ن = (٢(ن + ١) + ٣) - (٢ن + ٣) = ٢ن + ٢ + ٣ - ٢ن - ٣ = ٢$

$\therefore$ المتتابعة حسابية أساسها ٢

ب $\because ع_{ن+١} - ع_ن = \left(٢ + \frac{٣}{ن+١}\right) - \left(٢ + \frac{٣}{ن}\right)$

$= \frac{٣}{ن+١} - \frac{٣}{ن} = \frac{٣ن - ٣(ن+١)}{ن(ن+١)} = \frac{-٣}{ن(ن+١)}$ لا تساوى مقدارًا ثابتًا.

$\therefore$ المتتابعة ليست حسابية.

حاول أن تحل

(٢) بين أيًّا من المتتابعات التى يعطى حدها النونى بالعلاقات الآتية تكون حسابية، ثم أوجد أساسها في حال كونها حسابية.

أ $ع_ن = ٥ - ٣ن$ ب $ع_ن = (ن + ١)^٢$

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية:

Graphical representation of an arithematic sequence

مثال

(٣) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الحسابية (١٠، ٧، ٤، ...)، ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

الحل

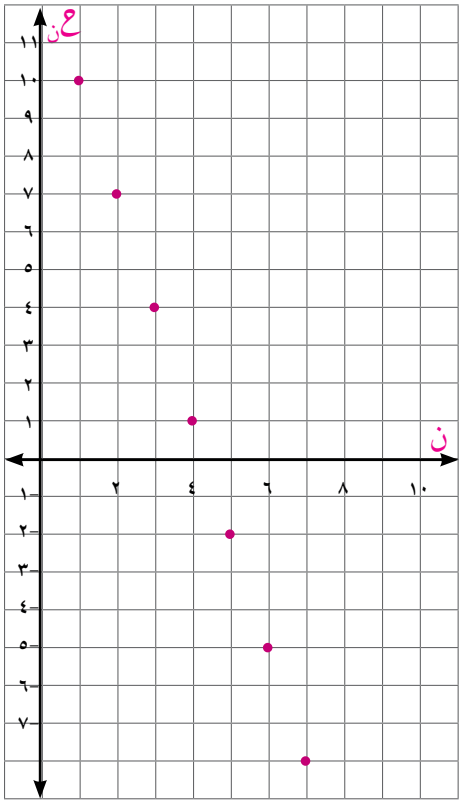
$\because ع_٢ - ع_١ = ٧ - ١٠ = -٣$

$\therefore$ الحدود الأربعة التالية هى: ١، - ٢، - ٥، - ٨

مجال المتتابعة هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ،}

مدى المتتابعة هو {١٠ ، ٧ ، ٤ ، ١ ، - ٢ ، - ٥ ، - ٨ ،}

والشكل المجاور يبين التمثيل البيانى للمتتابعة.



نلاحظ من الشكل المجاور أن:

- النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة.

مما يعنى أن المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ صـ$^{+}$ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.

نستنتج مما سبق أن:

- العلاقة بين المتغيرين ن، ع$_{ن}$ هى: ع$_{ن}$ = ء ن + ب حيث ب، ء ثابتان ، ء أساس المتتابعة.
- تكون المتتابعة تزايدية إذا كان ء > ٠ ، وتكون تناقصية إذا كانت ء < ٠



استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة حسابية:

لكتابة المتتابعة الحسابية التى فيها (أ = ١٠، ء = - ٣) مثلا نتبع الآتى:

- نكتب قيمة أ (العدد ١٠) ثم نضغط علامة (=) ثم نضع قيمة ء بالضغط على (-) ثم (العدد٣) و نضغط علامة (=) فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على علامة (=) تعطى الحدود التالية وهكذا...

تفكير ناقد:

١- ماذا تتوقع أن تكون المتتابعة الحسابية (ع$_{ن}$) إذا كانت (ء = ٠)؟ فسِّر إجابتك.

حاول أن تحل

٣ فى المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٣ن – ٥:

أ أثبت أن (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية وأوجد اساسها.

ب بيِّن أن هذه المتتابعة تزايدية.

جـ أوجد حدها الخامس عشر.

د إذا كان ع$_{ن}$ = ٨٥ فما قيمة ن.

الحد النونى للمتتابعة الحسابية: The n^{th} Term

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية (ع$_{ن}$) التى حدها الأول أ وأساسها ء كالآتى:

ع$_{١}$ = أ ، ع$_{٢}$ = أ + ء ، ع$_{٣}$ = أ + ٢ ء وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو:

ع$_{ن}$ = أ + (ن – ١) ء وإذا كان ع$_{ن}$ = ل (حيث ل هو الحد الأخير فإن ل = أ + (ن-١) ء

مثال

٤ فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ، ١٠٠)

أ أوجد الحد العاشر.

ب أوجد عدد حدود هذه المتتابعة.

الحل

∵ المتتابعة حسابية

∴ أ = ١٣، ء = ١٦ – ١٣ = ٣

أ ∵ ع$_{ن}$ = أ + (ن – ١) ء

∴ ع$_{١٠}$ = ١٣ + (١٠ – ١) × ٣

= ١٣ + ٩ × ٣ = ١٣ + ٢٧ = **٤٠**

ب المطلوب هو إيجاد قيمة ن عندما ل = ١٠٠

∵ ع$_{ن}$ = أ + (ن – ١) ء

∴ ١٠٠ = ١٣ + ٣ن – ٣

∴ ١٠٠ = ١٣ + (ن – ١) × ٣

أى أن: ٣ن = ١٠٠ – ١٠ = ٩٠

∴ ن = **٣٠**

حاول أن تحل

٤ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ٩ ، ١١ ، ، ٦٥) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية.

تعيين المتتابعة الحسابية: *Identifying the Arithematic Sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى عُلِم حدها الأول والأساس.

مثال

٥ الحدان السابع والخامس عشر فى متتابعة حسابية هما ١٨ ، ٣٤ على الترتيب أوجد أساس هذه المتتابعة وحدها الأول ثم أوجد حدها النونى.

الحل

$ع_٧ = ١٨ ، ع_{١٥} = ٣٤$ من معطيات المسالة

$\because ع_ن = أ + (ن - ١) ء$

$\therefore أ + ٦ء = ١٨ ، أ + ١٤ء = ٣٤$

$\therefore ٨ء = ١٦$ بطرح المعادلتين

$ء = ٢$ بالقسمة على ٨

$\therefore أ + ٦ \times ٢ = ١٨$ بالتعويض فى المعادلة الأولى

$\therefore أ = ١٨ - ١٢ = ٦$

ولإيجاد الحد النونى نعوض فى القانون: $ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ عن قيمتى أ، ء

$ع_ن = ٦ + (ن - ١) \times ٢ = ٦ + ٢ن - ٢ = ٢ن + ٤$

الحد الأول يساوى ٦ والأساس يساوى ٢ **والحد النونى** هو ٢ن + ٤

حاول أن تحل

٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ١٧، ومجموع حديها الثالث والعاشر = ٣٧.

الأوساط الحسابية: *Arithmetic means*

عندما يوجد حدان غير متتاليين فى متتابعة حسابية، فتسمى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين أوساطا حسابية، ويمكن استخدام هذا المفهوم فى إيجاد الحدود الناقصة بين هذين الحدين فى المتتابعة الحسابية.

تعريف

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية،

فإن ب تعرف **بالوسط الحسابى** بين الحدين أ ، جـ حيث: ب - أ = جـ - ب

أى أن: ٢ب = أ + جـ فتكون ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$ لذلك فإن: $\left(أ ، \frac{أ + جـ}{٢} ، جـ\right)$ **متتابعة حسابية**.

ويمكن إدخال عدة أوساط حسابية: $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن$ بين العددين أ، ب

بحيث تكون الأعداد: $(أ ، س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن ، ب)$ **متتابعة حسابية**.

تعبير شفهى: ما العلاقة بين عدد الأوساط الحسابية، وبين عدد حدود المتتابعة التى تحتوى هذه الأوساط؟

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين:

Insert a Finite Number of Arithematic Means Between Two Numbers

مثال

(٦) أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨

الحل

١- نوجد عدد حدود المتتابعة.

توجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة، لذا فإن عدد حدود المتتابعة الحسابية

ن = ٢ + ٥ = ٧

٢- نوجد قيمة ء

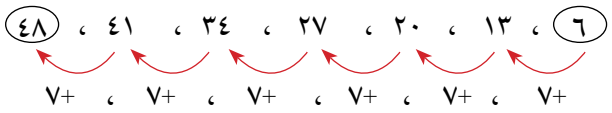
الحد النونى للمتتابعة الحسابية: ع$_{ن}$ = أ + (ن – ١) ء

بالتعويض عن: أ = ٦ ، ع$_{ن}$ = ٤٨، ن = ٧

٤٨ = ٦ + (٧ – ١) ء أى أن: ٦ء = ٤٢

بقسمة الطرفين على ٦ ء = ٧

٣- نستخدم قيمة ء لإيجاد الأوساط الحسابية المطلوبة



الأوساط المطلوبة هى: ١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١

حاول أن تحل

(٦) أدخل ٧ أوساط حسابية بين العددين – ٢٤ ، ١٦

تمـارين (١ – ٣)

حدد أيًّا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها غير حسابية ثم أوجد الأساس فى حال كونها حسابية:

(١) (٣٤ ، ٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ١٨)

(٢) (٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٧)

(٣) (-١٢ ، -١٨ ، - ٢٤ ، - ٣٠ ، - ٣٦)

(٤) (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

أكمل ما يأتى:

(٥) الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) هو

(٦) الحد الحادى عشر من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٣ن – ٥ هو

(٧) الحد النونى للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، ...) هو

(٨) الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو

(٩) إذا كان الوسط الحسابى للعددين س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س تساوى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١٠) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة:

أ (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...)
ب (-١١ ، -١٥ ، -١٩ ، -٢٣ ، ...)
ج $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦} ، ...)$
د $(\frac{٢١}{٥} ، \frac{١٦}{٥} ، \frac{١١}{٥} ، \frac{٦}{٥} ،)$

(١١) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى:

أ $(ع_ن) = (\frac{ن+١}{ن})$
ب $(ع_ن) = (ن+١)^٢$
ج $(ع_ن) = (\frac{٣}{ن}(ن+٢))$
د $(ع_ن) = (\frac{ن^٣-١}{ن^٢+ن+١})$

(١٢) إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حسابية حيث $ع_ن = ٣ن + ٢$ فإن الوسط الحسابى بين $ع_٥$ ، $ع_{١١}$ يساوى:

أ ٨
ب ١٦
ج ٢٢
د ٢٦

(١٣) إذا كان $٢أ + ١$ ، $٥أ - ١$ ، $٦أ + ٣$ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى

أ ١
ب ٢
ج ٣
د ٥

(١٤) إذا كانت أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن: $\frac{ص - س}{ب - أ}$ تساوى:

أ ٢
ب ٣
ج ٤
د ٦

اكتشف الخطأ:

(١٥) يعرف أساس المتتابعة الحسابية بأنه الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة أى أن:

$ء = ع_ن - ع_{ن-١}$ لكل $ن \in صـ^+$

(١٦) تعطى العلاقة بين ن ، $ع_ن$ فى المتتابعة الحسابية كالآتى $ع_ن = أن + ب$ حيث أ ، ب ثابتان ، ب هو أساس المتتابعة فى هذه العلاقة .

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٧) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠).

(١٨) فى المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ، -١٣٣) أوجد:

أ قيمة الحد السابع
ب عدد حدود المتتابعة

(١٩) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٦٧ ، ٦٤ ، ٦١ ،)

(٢٠) أوجد رتبة وقيمة أول حد قيمته أكبر من ١٨٠ فى المتتابعة الحسابية:

(٢١) اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة $(ع_ن) = (٢ + ٥ ن)$ ، ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من المتتابعة أوجد رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠

(٢٢) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ع_{ن}$ = ٣٩ ، $ع_{٢ن}$ = ٧٩ فما قيمة ن؟ ثم أوجد المتتابعة.

(٢٣) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثانى.

(٢٤) ($ع_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ع_{١} + ع_{٢}$ = ٩ ، $ع_{٥}$ = ٢٢ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٥) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤:٧

(٢٦) متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة.

(٢٧) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو ١٩، حدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢.

(٢٨) ($ع_{ن}$) متتابعة حسابية فيها: $ع_{٢} + ع_{٤}$ = ٤٢ ، $ع_{٣} \times ع_{٥}$ = ٣١٥ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٩) إذا كانت (٨ ، أ ، ، ب ، ٦٨) تكون متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ حدًّا فأوجد قيم أ ، ب

(٣٠) إذا كانت ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمة أ ، ب

(٣١) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ٤أ ، ٢ب هو ٢٠ ، فأوجد قيمة كل من أ ، ب

(٣٢) أدخل ١٦ وسطا حسابيا بين ٢٧ ، - ٢٤

(٣٣) متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة.

(٣٤) إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال الوسط الثانى. أوجد عدد هذه الأوساط

(٣٥) **الربط بالفيزياء:** بدأ كريم فى قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة فى منحدر فقطع فى الثانية الأولى ١٠٠ سم وفى كل ثانية تالية بعد ذلك كان يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم. أوجد المسافة التى يقطعها فى الثانية العاشرة.

(٣٦) **الربط بالتجارة:** اشترى رجل دراجة بخارية واتفق مع البائع أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى هو ١٢٠ن + ٨٠ ، فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه. أوجد عدد هذه الأقساط.

(٣٧) **تفكير إبداعى:** إذا كان ل ، م وسطين حسابيين بين س ، ص حيث ل > م فأثبت أن: ل - م = $\frac{١}{٣}$ (س - ص).

المتسلسلات الحسابية

١ - ٤

Arithmetic Series

سوف تتعلم

- متسلسلة حسابية.
- إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير.
- إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس .

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة حسابية .
 arithmetic series
- رمز المجموع
 Summation notation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
 Scientific calculator

مجموع المتسلسلة الحسابية: *Sum of Arithmetic Sequence*



كارل جاوس: عالم ألماني
١٧٧٧ م - ١٨٥٥م

أحدث التلاميذ ضوضاء داخل الفصل فأراد المعلم معاقبتهم إذ طلب إليهم جمع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ وذلك حتى يطول الوقت و يعود الهدوء إلى الفصل، لكن لم تمض بضع دقائق حتى تقدم صبى لم يتجاوزعمره ٧ سنوات يسمى كارل جاوس (Karl Gauss) وأبلغه بأن ناتج الجمع هو(٥٠٥٠) فسأله المعلم عن كيفية توصله إلى هذه الإجابة الصحيحة؟

فأجابه بأن ناتج الجمع ١٠١ يتكرر من جمع الأعداد الآتية:

١ + ١٠٠ ، ٢ + ٩٩ ، ٣ + ٩٨ ، ، ٥٠ + ٥١ خمسين مرة

وبالتالى فإن ناتج الجمع هو ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠

تعلم

مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة حسابية

Sum of the First n^{th} Terms of an Arithmetic Sequence

أولا: مجموع ن حدًّا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول(أ) والأخير (ل)

و أساسها ء، وعدد حدودها ن يرمز له بالرمز جـن و يعطى بالمتسلسلة التالية:

جـن = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + ... + (ل - ء) + ل (١)

كما يمكن كتابة المتسلسلة بالصورة:

جـن = ل + (ل - ء) + (ل - ٢ ء) + ... + (أ + ء) + أ (٢)

وبجمع المعادلتين (١)، (٢) ينتج أن:

٢جـن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) إلى ن من المرات

أى أن ٢جـ = ن (أ + ل) وبقسمة الطرفين على ٢

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

تذكر أن

$\sum_{ر=١}^{ن} (ع_ر)$

- ن: رمز التجميع
- ر = ١: قيمة ر الأولى
- ن: قيمة ر الأخيرة
- $ع_ر$: قاعدة المتسلسلة

مثال

استخدام رمز التجميع Σ

(١) أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٤} (٤ ر - ٣)$

الحل

ن = ٢٤ − ٥ + ١ = ٢٠ — نوجد عدد حدود المتتابعة

$ع_ن = ٤ن - ٣$ — الحد النونى للمتتابعة

$ع_٥ = ٤ \times ٥ - ٣ = ١٧$ ، $ع_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ - ٣ = ٩٣$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ — صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (١٧ + ٩٣) = ١١٠٠$ — بالتعويض عن أ = ١٧، ل = ٩٣، ن = ٢٠

حاول أن تحل

(١) أوجد:

أ $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$

ب $\sum_{م=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥م)$

مثال

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢

الحل

$ل = أ + (ن - ١)ء$ — الحد النونى للمتتابعة

$٦٢ = ٢ + (ن - ١) \times ٣$ — بالتعويض عن أ = ٢، ء = ٣، $ل_ن$ = ٦٢

أى أن: $٣ن - ٣ + ٢ = ٦٢$

$٣ن - ١ = ٦٢$ — فتكون ن = ٢١

$حـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ — صيغة المجموع

$جـ_{٢١} = \frac{٢١}{٢} (٢ + ٦٢) = ٦٧٢$ — بالتعويض عن أ = ٢، ن = ٢١، $ع_ن$ = ٦٢

حاول أن تحل

(٢) أوجد:

أ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣

ب عدد حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول يساوى ٣ وحدها الأخير يساوى ٣٩ ومجموع ن حدًّا الأولى منها يساوى ٢١٠

ثانيًا: إيجاد مجموع ن حدًّا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس

نعلم أن $ل = أ + (ن - ١)ء$ ، $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

وبالتعويض من العلاقة الأولى فى العلاقة الثانية فإن:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + أ + (ن - ١)ء]$ — أى أن: $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١)ء]$

مثال

(٣) فى المتسلسلة الحسابية ٥ + ٨ + ١١ + ... أوجد:

أ مجموع ٢٠ حدًّا الأولى منها.

ب مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

ج مجموع حدود المتتابعة بدأ من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

الحل

$أ = ٥$ ، $ى = ٨ - ٥ = ٣$

أ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) ى]$ صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} \times [٢ \times ٥ + (٢٠ - ١) \times ٣]$ بالتعويض عن $أ = ٥$ ، $ى = ٨ - ٥ = ٣$

$جـ_ن = ١٠ (١٠ + ١٩ \times ٣)$

$= ١٠ \times ٦٧ = ٦٧٠$ بالتبسيط

ب $ع_ن = أ + (ن - ١) ى$ الحد النونى للمتتابعة

$ع_٧ = أ + ٦ى$

$= ٥ + ٦ \times ٣ = ٢٣$ بالتعويض عن $أ = ٥$ ، $ى = ٣$ ، $ن = ٧$

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢} \times [٢ ع_٧ + (١٠ - ١) \times ٣]$ بالتعويض فى صيغة المجموع

$جـ_{١٠} = ٥ \times [٢ \times ٢٣ + ٢٧]$

$= ٥ \times ٧٣ = ٣٦٥$ بالتبسيط

ج مجموع حدود المتتابعة ابتداء من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

$ع_ن = أ + (ن - ١) ى$ الحد النونى للمتتابعة

$ع_{١٠} = أ + ٩ى$

$= ٥ + ٩ \times ٣ = ٣٢$ بالتعويض عن $أ = ٥$ ، $ى = ٣$

$ع_{٢٠} = أ + ١٩ ى = ٥ + ١٩ \times ٣ = ٦٢$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ صيغة المجموع

$جـ_{١١} = \frac{١١}{٢} (ع_{١٠} + ع_{٢٠})$

$= \frac{١١}{٢} (٣٢ + ٦٢) = ٥١٧$ بالتعويض عن $ع_{١٠} = ٣٢$ ، $ع_{٢٠} = ٦٢$ ، $ن = ١١$

فكر:

هل توجد حلول أخرى لإيجاد مجموع حدود المتتابعة بدأ من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

حاول أن تحل

(٣) فى المتتابعة الحسابية (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...) . أوجد:

أ مجموع ١٥ حدًا الأولى منها .

ب مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر .

ج عدد الحدود التى مجموعها يساوي ٧٥٠ ابتداء من الحد الأول.

مثال

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها: ع١ = ١١ ، عن = ٨٧ ، جـن = ٩٨٠

الحل

أ إيجاد قيمة ن

جـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) — صيغة المجموع

٩٨٠ = $\frac{ن}{٢}$ (١١ + ٨٧) — بالتعويض عن ع١ = ١١ ، عن = ٨٧ ، جـن = ٩٨٠

٩٨ × $\frac{ن}{٢}$ = ٩٨٠ فيكون: ن = ٢٠ حدًّا — بالتبسيط

ب إيجاد قيمة ء

عن = أ + (ن - ١) ء — الحد النونى

٨٧ = ١١ + ١٩ ء — بالتعويض عن ع١ = ١١ ، ن = ٢٠ ، عن = ٨٧

١٩ء = ٨٧ - ١١ = ٧٦ — بالتبسيط

ء = ٤ — وبالقسمة على ١٩

جـ تكوين المتتابعة: ع٢ = ١١ + ٤ = ١٥ ، ع٣ = ١٥ + ٤ = ١٩

المتتابعة الحسابية هى (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ... ، ٨٧)

حاول أن تحل

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها

أ ع١ = ٢٣ ، عن = ٨٦ ، جـن = ٥٤٥

ب ع١ = ١٧ ، عن = - ٩٥ ، جـن = - ٥٨٥

مثال

الربط بالفيزياء:

(٥) سقط جسم من ارتفاع ٤٩٠ مترا تحت تأثير الجاذبية الأرضية، وبفرض إهمال مقاومة الهواء فإنه يقطع مسافة ٤,٩ أمتار فى الثانية الأولى ، ١٤,٧ متر فى الثانية الثانية، ٢٤,٥ متر فى الثانية الثالثة وهكذا، **أوجد:**

أ المسافة التى يقطعها الجسم فى الثانية السادسة.

ب مجموع المسافات المقطوعة فى الثوانى الثمان الأولى.

جـ متى يصل الجسم إلى سطح الأرض.

الحل

المسافات المقطوعة فى الثوانى الثلاث الأولى هي على الترتيب: ٤,٩ ، ١٤,٧ ، ٢٤,٥ ،

وهى تمثل متتابعة حسابية فيها: أ = ٤,٩ ، ء = ١٤,٧ - ٤,٩ = ٩,٨

أ بالتعويض عن: أ = ٤,٩ ، ء = ٩,٨ فى القانون: عن = أ + (ن - ١) ء

ع٦ = أ + ٥ء فتكون ع٦ = ٤,٩ + ٥ × ٩,٨ = ٥٣,٩ مترًا

ب بالتعويض عن: أ = ٤,٩ ، ء = ٩,٨، ن = ٨ فى القانون: جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) ء]

جـ$_{٨}$ = $\frac{٨}{٢}$ (٢ × ٤,٩ + ٧ × ٩,٨) = ٣١٣,٦ مترًا

ج بالتعويض عن أ = ٤,٩ ، ء = ٩,٨، جـ = ٤٩٠ فى القانون: جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) ء]

٤٩٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٤,٩ + (ن - ١) × ٩,٨] بفك الأقواس وبالتبسيط

٤٩٠ = ن(٤,٩ + ٤,٩ن – ٤,٩) أى أن: ٤,٩ن^{٢} = ٤٩٠

بقسمة الطرفين على ٤,٩ فتكون ن^{٢} = ١٠٠

وبأخذ الجذر التربيعى الموجب للطرفين: ن = ١٠ (لاحظ أن ن > ٠)

٩ حاول أن تحل

٥ **الربط بالرياضة:** يستعد كريم لسباق المسافات الطويلة، فقرر أن يتدرب على الجرى مسافة ٤ كيلومترات فى اليوم الأول ثم يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف كيلومتر واحد يوميا.

أ أوجد المسافة التى يقطعها كريم فى اليوم السابع.

ب أوجد مجموع المسافات التى يقطعها كريم فى الأسبوع الأول (الأسبوع سبعة أيام).

ج إذا استمر كريم فى التدريب على هذا النمط دون انقطاع فما عدد الأيام التى يقطع خلالها مسافة ٨١ كيلومترًا.

تمـارين (١ – ٤)

أكمل مايأتى

١ مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل هو

٢ مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ء هو

٣ $\sum_{ك=١}^{٥}$ (٢ك+١) = ...

٤ مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى

٥ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوى

٦ مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ تساوى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

٧ قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٢ر + ١) يساوى:

أ ٢٥ ب ٣٠ ج ٣٥ د ٤٠

٨ قيمة المتسلسلة: ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن – ١ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=٤}^{ن}$ (٥ر - ١) ب $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ر + ١) ج $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ر - ١) د $\sum_{ر=١}^{٥ن-١}$ (٣ر + ١)

٩ قيمة المتسلسلة: ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٥ر + ٢) ب $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٤ر + ٣) ج $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٧ر + ١) د $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٣ر + ٤)

(١٠) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ن + ١)) ابتداء من حدها الأول يساوى:

أ ن(ن + ١)　　ب ن(ن + ٢)　　ج ن(ن + ٥)　　د ن(ن + ٢) ن(ن + ٣)

اكتشف الخطأ

(١١) لإيجاد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها الموجبة وذلك بوضع جـ$_{ن}$ > ٠ لإيجاد قيمة ن ، ومن ثم نوجد أكبر مجموع.

(١٢) لإيجاد أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها السالبة وذلك بوضع جـ$_{ن}$ < ٠ لإيجاد قيمة ن ومن ثم نوجد اصغر مجموع.

(١٣) لإيجاد عدد حدود المتتابعة الحسابية الذى يتلاشى عنده المجموع نضع جـ$_{ن}$ = ٠ فيكون أ + (ن – ١)ء = ٠ [حيث ن ≠ ٠] ومن ذلك نوجد عدد الحدود.

(١٤) إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتابعة حسابية يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (٣ن + ٥)

فإن ع$_{ن}$ = جـ$_{ن+١}$ - جـ$_{ن}$.

أجب عن الأسئلة الآتية

(١٥) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ...).

(١٦) أوجد مجموع ٣٠ حدًّا الأولى من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٢ن + ٣

(١٧) أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠).

(١٨) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها مساوياً ٤٥٦

(١٩) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤، ٢١ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليتلاشى المجموع.

(٢٠) إذا كان مجموع ن من متتابعة حسابية يتعين بالقانون: جـ$_{ن}$= ٢ن(٧ – ن) فأوجد:

أ ع$_{٧}$

ب عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداء من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا – ٢٤٠

(٢١) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبا.

(٢٢) أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبا.

(٢٣) فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) أوجد:

أ مجموع ٢٠ حدًّا الأولى منها.

ب مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

ج مجموع حدود المتتابعة بدأ من ع$_{١٠}$ إلى ع$_{٢٠}$

٢٤ فى المتتابعة (ع$_{ن}$) = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...).

أ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

ب أوجد عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر من الصفر.

٢٥ فى المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...). أوجـد:

أ أكبر مجموع للمتتابعة.

ب عدد الحدود التى مجموعها = ١٢٠ ابتداء من الحد الأول " فسِّر وجود جوابين "

٢٦ متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = - ٢٦ ، ومجموع حدودها = - ١٤٠ أوجد هذه المتتابعة.

٢٧ (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ، ومجموع العشر حدود الأولى منها = ٢٣٥ أوجد هذه المتتابعة.

٢٨ متتابعة حسابية فيها ع$_{٣٦}$ = ٠ ، إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى منها = ضعف مجموع الخمسة حدود الأولى منها. أوجد قيمة ن.

٢٩ إذا أدخل ن وسطًا حسابيًّا بين ١ ، ٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط الأخير كنسبة $\frac{١٥}{٢٩}$. فما عدد الأوساط وما مجموع المتتابعة.

٣٠ متتابعة حسابية فيها ع$_{٤}$ = ٢٤ ، النسبة بين مجموع الخمسة حدود الأولى منها إلى مجموع الخمسة حدود التالية لها كنسبة ١ : ٢ ، أوجد هذه المتتابعة.

٣١ متتابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابى لحديها الثالث والسادس يساوى ١٦ ، فما هى المتتابعة؟ وكم حدًّا يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساويًا الصفر؟

٣٢ ادخار: يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يوما.

٣٣ الربط بالنشاط الفنى: مسرح مدرسى يتسع لـ ١٦ صفا ، فإذا كان الصف الأول يحتوى على ١٦ مقعدا، وكل صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذى يسبقه مباشرة بمقدار٤ مقاعد. كم عدد المقاعد بهذا المسرح؟

٣٤ الربط بالدخل: بدأ كريم العمل براتب سنوى قدره ١٩٢٠٠ جنيها ، فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيها. فكم يكون مجموع ما يحصل عليه من رواتب فى نهاية السنة العاشرة؟

٣٥ الربط بالتجارة: اقترض رجل مبلغا من المال، واتفق على أن يقوم بسداده على ١٠ أقساط، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بـ ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض؟

٣٦ صيانة: أسندت إحدى الشركات عمل صيانة شاملة لأحد مبانيها، وحددت موعدًا لاستلام المبنى، وكان من بين شروط التعاقد أنه فى حالة التأخير عن الموعد أن يدفع المسئول ١٠٠٠ جنيه غرامة عن اليوم الأول وتزاد ١٠٠ جنيه عن كل يوم تالٍ له ، فإذا تأخر المقاول عن تسليم هذه الأعمال خمسة أيام، فكم يكون إجمالى المبلغ المستحق لتسديد غرامة التأخير؟

نشاط

يمتلك كريم محلًا تجاريًا للسلع الغذائية و يقوم بترتيب علب التونة فى صفوف بحيث يضع فى الصف السفلى ١٢ علبة والصف الذى يليه ١١ علبة والصف الذى يليه ١٠ علب وهكذا...



١- أوجد عدد علب التونة فى الصف السابع.

٢- فى أى صف تكون علب التونة ٣ علب؟

٣- أوجد عدد علب التونة بدءًا من الصف الأول وحتى الصف الأخير الذى يحتوى على علبة واحدة.

٤- اذكر السبب الذى يجعل كريم يقوم بصف هذه العلب بهذه الطريقة.

٥- ابحث باستخدام الشبكة العنكبوتية عن أماكن انتشار سمك التونة ، وما فوائده الصحية؟

المتتابعة الهندسية

١ - ٥

Geometric Sequences

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الهندسية
- التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية.
- الحد النونى للمتتابعة الهندسية.
- تعيين المتتابعة الهندسية.
- الأوساط الهندسية.
- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين.

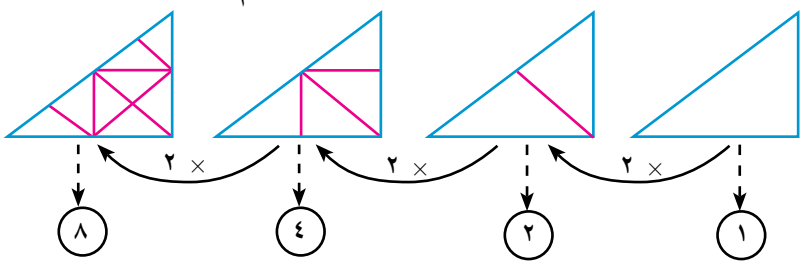
المصطلحات الأساسية

- متتابعة هندسية
 Seqences Geometric
- حد نونى
 n^{th} Term
- متتابعة تزايدية
 Increasing Seqence
- متتابعة تناقصية
 decreasing Sequence
- متتابعة متناوبة الإشارة
 Alternating Signal Sequence
- وسط هندسى
 Geometric Mean

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- Scientific Calculator
- برامج رسومية

تأمل المثلثات الصغرى فى كل شكل من الأشكال الآتية ثم أوجد عددها. ماذا تلاحظ؟



تعريف

تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية

إذا كان $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = مقدارًا ثابتًا لكل $ن \in ص^+$

ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر)

مثال

١ بين أيًّا من المتتابعات $(ع_ن)$ الآتية هندسية وأوجد أساس كل منها:

أ $(ع_ن) = (٢ \times ٣^ن)$ ب $(ع_ن) = (٤ ن^٢)$

ج المتتابعة $(ع_ن)$ حيث: $ع_١ = ١٢$ ، $ع_ن = \frac{١}{٤} \times ع_{ن-١}$ (حيث $ن > ١$)

الحل

أ $\therefore \frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{٢ \times ٣^{ن+١}}{٢ \times ٣^ن} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ (مقدار ثابت)

$\therefore$ المتتابعة هندسية وأساسها ر = ٣

ب $\therefore \frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{٤ (ن+١)^٢}{٤ ن^٢}$ (ليس مقدارًا ثابتًا)

$\therefore$ المتتابعة ليست هندسية

ج $\therefore ع_ن = \frac{١}{٤} \times ع_{ن-١}$ (حيث $ن > ١$)

$\therefore \frac{ع_ن}{ع_{ن-١}} = \frac{١}{٤}$ (مقدار ثابت)

$\therefore$ المتتابعة هندسية وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(١) بين أيًّا من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها فى حال كونها هندسية:

أ $(ع_ن) = (٩٦، ٤٨، ٢٤، ١٢، ٦، ٣)$

ب $(ع_ن) = (\frac{١}{٢٤٣}، -\frac{١}{٨١}، \frac{١}{٢٧}-، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٣})$

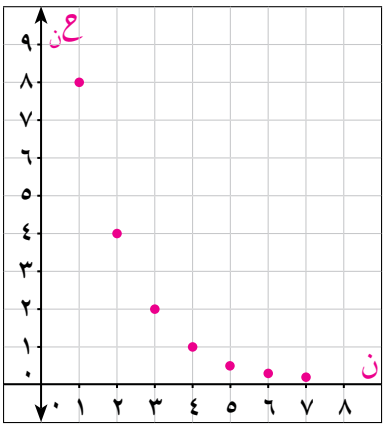
جـ $(ع_ن) = (٥ \times ٢^{ن})$

د $(ع_ن) = (٣ (ن + ١)^{٢})$

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية: *Graphical Representation of The Geometric Sequence*

مثال

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية (٨، ٤، ٢، ...) ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.



الحل

أساس المتتابعة = $\frac{١}{٢}$ وبالتالى فإن الحدود الأربعة التالية هى:

$١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}$

المجال هو {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

المدى هو $\{٨، ٤، ٢، ١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}\}$

ونلاحظ من الشكل البيانى أن:

- حدود المتتابعة متناقصة حيث أ > ٠ ، ٠ < ر < ١
- التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية وليس دالة من الدرجة الأولى كما فى المتتابعة الحسابية.

تعبير شفهى: اكتب وصفا للمتتابعة الهندسية من حيث كونها (تزايدية أ، تناقصية أ، متناوبة الإشارة) فى الحالات الآتية.

الحد الأول	موجب				سالب			
الأساس	ر > ١	٠ < ر < ١	-١ < ر < ٠	ر < -١	ر < ١	٠ < ر < ١	-١ < ر < ٠	ر < -١
الوصف	تزايدية						متناوبة الإشارة	

تفكير ناقد: هل يمكن أن يكون أساس المتتابعة الهندسية مساويًا للصفر أو مساويًا للواحد الصحيح ؟ فسِّر إجابتك.

حاول أن تحل

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية $(\frac{١}{٢٧}، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٣}، ...)$ ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

الحد النونى للمتتابعة الهندسية: *The n th Term*

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الهندسية $(ع_ن)$ التى حدها الأول أ وأساسها ر كالآتى:

$ع_١ = أ$، $ع_٢ = أ ر$، $ع_٣ = أ ر^{٢}$ وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو: $ع_ن = أ ر^{ن-١}$

مثال

(٣) فى المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ،) أوجد:

أ الحد الخامس

ب رتبة الحد الذى قيمته ٥١٢

الحل

∵ أ = ٢ ، ر = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ، ع$_{ن}$ = أ × ر$^{ن-١}$

∴ ع$_{٥}$ = أ ر^{٤} = ٢ × ٢^{٤} = ٢ × ١٦ = ٣٢

أى أن قيمة الحد الخامس تساوى ٣٢

∵ ع$_{ن}$ = أ × ر$^{ن-١}$ ∴ ٢ × ٢$^{ن-١}$ = ٥١٢

وبقسمة الطرفين على ٢

∴ ٢$^{ن-١}$ = ٢^{٨} ∴ ن - ١ = ٨ ∴ ن = ٩

أى أن الحد الذى قيمته ٥١٢ هو الحد التاسع

حاول أن تحل

(٣) أثبت أن المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٢ × ٣$^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع

تعيين المتتابعة الهندسية:

Identifying The Geometric Sequence

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول والأساس؟

مثال

(٤) (ع$_{ن}$) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة، فإذا كان ع$_{٣}$ + ع$_{٤}$ = ٦ ع$_{٢}$، ع$_{٧}$ = ٣٢٠ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

∵ ع$_{٣}$ + ع$_{٤}$ = ٦ ع$_{٢}$ ∴ ار^{٢} + ار^{٣} = ٦ × ار

∴ ار (ر + ر^{٢}) = ٦ × ار وبقسمة الطرفين على ار (حيث أ، ر لا يساويان الصفر)

∴ ر^{٢} + ر = ٦ أى أن: ر^{٢} + ر - ٦ = ٠

∴ (ر - ٢) (ر + ٣) = ٠ ∴ ر = ٢ أ، ر = - ٣ مرفوض (لأن الحدود موجبة)

∵ ع$_{٧}$ = ٣٢٠ ∴ ار^{٦} = ٣٢٠ وبالتعويض عن ر = ٢

∴ أ × ٢^{٦} = ٣٢٠ ∴ ٦٤ أ = ٣٢٠ وبقسمة الطرفين على ٦٤

∴ أ = ٥ المتتابعة هى (٥، ١٠، ٢٠،)

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة هندسية



لكتابة المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ٥ ، ر = ٢ مثلا نتبع الآتى:

نكتب قيمة أ (العدد ٥) ثم نضغط علامة (=) ثم نضغط على المفتاح (×) ونضع قيمة ر (العدد ٢) ثم نضغط علامة (=) فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على علامة (=) تعطى الحدود التالية وهكذا

حاول أن تحل

٤ $(ع_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ع_٥ = ٨ ع_٢$ ، $ع_٤ + ع_٦ = ٢٤٠$. أوجد هذه المتتابعة

٥ متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٢ ، حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٢٧ أوجد هذه المتتابعة.

مثال

٥ **الربط بالتعليم:** إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية في إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤ ٪ سنويًا، وكان عدد الطلاب حاليا ٢٤٠٠ طالب. فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات؟

الحل

∵ عدد الطلاب حاليا = ٢٤٠٠

∴ عدد الطلاب فى السنة الثانية = ٢٤٠٠ (١ + ٠,٠٤)

= ٢٤٠٠ (١,٠٤)

∴ عدد الطلاب فى السنة الثالثة = ٢٤٠٠(١,٠٤) + ٢٤٠٠(١,٠٤) × ٠,٠٤

= ٢٤٠٠(١,٠٤) (١ + ٠,٠٤) = ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢} وهكذا ...

أى أن أعداد الطلاب تكون متتابعة هندسية (٢٤٠٠ ، ٢٤٠٠(١,٠٤) ، ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢} ، ...)

أ = ٢٤٠٠، ر = ١,٠٤ ، ن = ٦ وبالتعويض فى قانون الحد النونى للمتتابعة الهندسية $ع_ن = أ \times ر^{ن-١}$

$ع_ن = (٢٤٠٠) \times (١,٠٤)^{٥} = ٢٩١٩,٩٦٦٩٦٦$

أى أن عدد الطلاب بعد ٦ سنوات يساوى ٢٩٢٠ طالبًا تقريبًا.

حاول أ ن تحل

٦ **الربط بالفيزياء:** تسقط كرة من المطاط من ارتفاع ٢٤٠ مترا فوق سطح الأرض، فإذا كانت الكرة ترتد إلى ارتفاع قدره $\frac{٣}{٤}$ ارتفاعها السابق مباشرة، فكم يكون ارتفاعها بعد الاصطدام السابع؟

الأوساط الهندسية: *Geometric Means*

الأوساط الهندسية كما فى الأوساط الحسابية هى الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين فى متتابعة هندسية، و يستخدم أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد هذه الأوساط.

تعريف ٢

إذا كانت أ، ب، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسى بين العددين أ، جـ حيث: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ أى أنه $ب^{٢} = أ جـ$ فتكون $ب = \pm\sqrt{أ جـ}$

أضف إلى معلوماتك

يعرف الوسط الهندسى لمجموعة من القيم الحقيقية الموجبة $ع_١، ع_٢، ع_٣،، ع_ن$ بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم أى أن: الوسط الهندسى (GM) = $\sqrt[ن]{ع_١ \times ع_٢ \times ... \times ع_ن}$

تعبير شفهى:

الأوساط الهندسية التى يمكن إدخالها بين عددين تعتمد على إشارة هذين العددين . فسِّر هذه العبارة.

إدخال عدد من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين:

مثال

(٦) أوجد الأوساط الهندسية فى المتتابعة: (٤ ، ، ، ، ، ، ٢٩١٦)

الحل

١- نوجد عدد حدود المتتابعة

يوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة الهندسية

لذا فإن عدد حدود المتتابعة ن = ٢ + ٥ = ٧

٢- نوجد قيمة ر

باستخدام القانون: $ل = أ ر^{ن-١}$

$٢٩١٦ = ٤ \times ر^{٧-١}$ بالتعويض عن: أ = ٤، ل = ٢٩١٦، ن = ٧

أى أن: $٤ \times ر^{٦} = ٢٩١٦$ بقسمة الطرفين على ٤ $ر^{٦} = ٧٢٩$

أى أن: $ر^{٦} = (\pm ٣)^{٦}$ ومنها $ر = \pm ٣$

٣- نستخدم قيمة ر لإيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة

الأوساط هى:

أ، ٤ (×٣) ، ١٢ (×٣) ، ٣٦ (×٣) ، ١٠٨ (×٣) ، ٣٢٤ (×٣) ، ٩٧٢ (×٣) ، ٢٩١٦

٤ (×-٣) ، -١٢ (×-٣) ، ٣٦ (×-٣) ، -١٠٨ (×-٣) ، ٣٢٤ (×-٣) ، -٩٧٢ (×-٣) ، ٢٩١٦

الأوساط المطلوبه هى ١٢، ٣٦، ١٠٨، ٣٢٤، ٩٧٢ أ، -١٢، ٣٦، -١٠٨، ٣٢٤، -٩٧٢

حاول أن تحل

(٧) أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين:

إذا كان س، ص ∈ $ع^{+}$ ، س ≠ ص

فإن: الوسط الحسابى (ع) = $\frac{س + ص}{٢}$ ، الوسط الهندسى الموجب (هـ) = $\sqrt{س ص}$

∴ ع - هـ = $\frac{س + ص}{٢} - \sqrt{س ص}$

$= \frac{س - ٢\sqrt{س ص} + ص}{٢}$

∴ $= \frac{(\sqrt{س} - \sqrt{ص})^{٢}}{٢} > ٠$ (بوضع المقدار على صورة مربع كامل)

∴ ع > هـ وحيث إن الوسط الهندسى الموجب أكبر من الوسط الهندسى السالب

فيكون الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

أضف إلى معلوماتك

إذا كانت: $ع_{١}$، $ع_{٢}$، $ع_{٣}$،

$ع_{ن}$ أعداد حقيقية موجبة فإن:

$\frac{ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣} + ... ع_{ن}}{ن} \geq \sqrt[ن]{ع_{١} ع_{٢} ع_{٣} ... ع_{ن}}$

وتتحقق المساواه فقط عندما:

$ع_{١} = ع_{٢} = ع_{٣} = ... = ع_{ن}$

تفكير ناقد: ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين حقيقيين موجبين متساويين؟

مثال

(٧) إذا كانت ٦أ ، ٣ب ، ٢جـ ، ٢ء كميات موجبة فى تتابع حسابى.
أثبت أن ب جـ > ٢ أء

الحل

∵ ٣ب وسط حسابى بين ٦أ ، ٢جـ
وحيث إن الوسط الحسابى > الوسط الهندسى الموجب
∴ ٣ب > $\sqrt{٦أ \times ٢جـ}$ وبتربيع الطرفين
∴ ٩ب^{٢} > ١٢ أ جـ (١)
وبالمثل ٢جـ وسط حسابى بين ٣ب، ٢ء
∴ ٢جـ > $\sqrt{٣ب \times ٢ء}$ وبتربيع الطرفين
٤جـ^{٢} > ٦ب ء (٢)
ومن (١)، (٢)
٩ب^{٢} × ٤جـ^{٢} > ١٢ أجـ × ٦ب ء
وبقسمة الطرفين على ٣٦ب جـ (ب ، جـ ∈ ع$_{+}$)
∴ ب جـ > ٢ أء

تمـارين (١ – ٥)

أكمل ما يأتى

(١) الحد الخامس من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٢ × (٣)$^{ن-١}$ يساوى

(٢) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...) هو

(٣) الحد السادس من المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٢٤٣}$ ، $\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ...) هو

(٤) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو

(٥) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص تساوى

(٦) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب >

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٧) الحد التالى فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، ...) هو:

أ $\frac{١١}{٨}$ ب $\frac{٢٧}{١٦}$ ج $\frac{٩}{٤}$ د $\frac{٨١}{٣٢}$

(٨) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة:

أ (٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ،) ب (لوا ، لوا^{٢} ، لوا^{٣} ، لوا^{٤} ، ...)

ج ($\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$) د ($\frac{٣ب}{١٢}$ ، ٣ ، $\frac{١٦}{ب}$ ، $\frac{١١٢ ا^{٢}}{ب^{٢}}$)

(٩) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى:

أ (ع$_{ن}$) = (٤ ن^{٢}) لكل ن ⩽ ١ ب (ع$_{ن}$) = ($\frac{١}{٤}$ × ع$_{ن-١}$) لكل ن ⩽ ٢

ج (ع$_{ن}$) = (٢^{ن} - ١) لكل ن ⩽ ١ د (ع$_{ن}$) = (لو (٣ × ٢^{ن})) لكل ن ⩽ ١

(١٠) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن:

أ $\frac{أ + جـ}{٢}$ < ب ب $\frac{أ + جـ}{٢}$ > ب

ج $\frac{أ + جـ}{٢}$ = ب د ب^{٢} = أ + جـ

اكتشف الخطأ:

(١١) تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التى تقع على استقامة واحدة.

(١٢) تسمى المتتابعة (ع$_{ن}$) هندسية إذا كان $\frac{ع_{ن}}{ع_{ن+١}}$ يساوى مقدارًا ثابتًا يعرف بأساس المتتابعة (لكل ن⩽ ١).

(١٣) تكون المتتابعة الهندسية تناقصية إذا كان أساسها ر ∈]-١ ، ٠[

(١٤) تعرف الأوساط الهندسية بأنها الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين من متتابعة هندسية و يمكن إيجادها متى علم قيمة هذين الحدين.

(١٥) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٦) إذا كانت (ع$_{ن}$) متتابعة حيث ع$_{ن}$ = ٥ × ٢^{ن} أثبت أنها متتابعة هندسية ثم أوجد حدودها الثلاثة الأولى.

(١٧) فى المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، -١ ، ...) أوجد:

أ حدها العاشر.

ب رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤

(١٨) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث = ٢٤ . أوجد هذه المتتابعة.

(١٩) أوجد المتتابعة الهندسية التى فيها ع$_{٣}$ = ١٢ ، ح$_{٨}$ = ٣٨٤.

(٢٠) بيِّن أن المتتابعة $(ع_ن)$ حيث: $ع_ن = \frac{٣}{٨} (٢)^ن$ هى متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الثامن، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨

(٢١) أوجد الوسط الهندسى بين ١٦ ، ٤٩

(٢٢) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣.

(٢٣) أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣.

(٢٤) أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين $\frac{٨}{٢٧}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$

(٢٥) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين هى ١: ٢٧. أوجد عدد تلك الأوساط.

(٢٦) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة، وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ، مجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦، أوجد هذه المتتابعة.

(٢٧) إذا كانت س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة فى تتابع هندسى أثبت أن س + ل > ص + ع.

(٢٨) **الربط بالبيئة:** يصب الماء في خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة ، فإذا صب في اليوم الأول ١٢ لترا فبعد كم يومًا يصب فيه ١٥٣٦ لترا؟

(٢٩) **الربط بالسكان:** يزداد عدد السكان فى إحدى المدن بمعدل ثابت ٣ ٪ كل سنة . كم يكون عدد سكان هذه المدينة بعد ٥ سنوات إذا علم أن عدد السكان الحالى هو ٦٠٠ ٠٠٠ نسمة.

(٣٠) **الربط بالنسبة المئوية:** سيارة ثمنها عند شرائها ١٢٠ ألف جنيه ، فإذا كان ثمن السيارة يتناقص سنويًّا بنسبة ١٢ ٪ ، فكم تكون قيمة السيارة بعد ٥ سنوات ؟

(٣١) **الربط بالدخل:** موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه، ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ٦ ٪ زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة . فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٦ سنوات؟

(٣٢) **تفكير إبداعى:**

أ إذا كان أ + ب + جـ = ١ حيث: أ ، ب ، جـ كميات موجبة ومختلفة.

أثبت أن: (١ - أ) (١ - ب) (١ - جـ) > ٨ أ ب جـ

ب إذا كانت : س ∈ $ع^+$ ، س ≠ ١

أثبت أن: س + $\frac{١}{س}$ > ٢

المتسلسلات الهندسية

١ - ٦

Geometric Series

سوف تتعلم

- مجموع المتسلسلة الهندسية .
- تكوين المتتابعة الهندسية .
- المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر إعتيادي .

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة هندسية
 Geometric Series
- متسلسلة هندسية غير منتهية
 Infinite Geometric Series

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
 Scientific Calculator
- برامج رسومية
 Graphical Programs

مجموع المتسلسلة الهندسية: *Sum of the Geometric Series*

نعلم أن المتسلسلة الهندسية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية و يرمز لمجموع ن حدًّا منها بالرمز جـ$_ن$.

مجموع ن حدًّا الأولى من متسلسلة هندسية

Sum of the First n Terms of a Geometric Series

أولا: إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-١}$ متسلسلة هندسية حدها الأول أ، أساسها ر فإنه يمكن إيجاد المجموع جـ$_ن$ لهذه المتسلسلة كما يلى:

جـ$_ن$ = أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-٢}$ + أر$^{ن-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر فإن:

رجـ$_ن$ = أر + أر^{٢} + أر^{٣} + ... + أر$^{ن-١}$ + أر^{ن} (٢)

وبطرح المعادلتين يكون:

جـ$_ن$ - رجـ$_ن$ = أ - أر^{ن}

أى أن: جـ$_ن$(١ - ر) = أ(١ - ر^{ن})

وبقسمة الطرفين على (١ - ر) بشرط أن ١ - ر ≠ ٠

$$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} ، ر \neq ١$$

تفكير ناقد: ماذا تكون قيمة المجموع عندما ر = ١؟ أوجد قيمة المجموع فى هذه الحالة.

مثال

(١) أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها: أ = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ٨

الحل

$$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$$جـ_٨ = \frac{٣(١ - ٢^{٨})}{٢ - ١}$$ بالتعويض عن: أ = ٣، ر = ٢، ن = ٨

جـ$_٨$ = ٣ × ٢٥٥ = ٧٦٥ وبالتبسيط

حاول أن تحل

(١) أوجد مجموع المتتابعتين الهندسيتين اللتين فيهما:

أ) أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦ ب) أ = ١٠٠٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

ثانيا: إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير

نعلم أن: $جـ_ن = \frac{أ - أ ر^ن}{1 - ر}$ (١)

وأن: $ل = أ ر^{ن-1}$ وبضرب الطرفين فى ر

فتكون $ل ر = أ ر^ن$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) فإن: $جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{1 - ر}$ ، $ر \neq 1$

مثال

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية: ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١

الحل

$جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{1 - ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$جـ = \frac{1 - ٣ \times ٦٥٦١}{3 - 1}$ بالتعويض عن: أ = ١، ر = ٣، ل = ٦٥٦١

$جـ = \frac{١٩٦٨٢}{٢} = ٩٨٤١$ بالتبسيط

حاول أن تحل

(٢) أوجد مجموع المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

أ) أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١

ب) أ = ٢٠٤٨ ، ر = $\frac{1}{2}$ ، ل = ١٢٨

استخدام رمز التجميع *Using the Summation Notation*

مثال

(٣) أوجد $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣ (٢)^{ر-1}$

الحل

$ع_٥ = أ = ٣(٢)^{٥-1} = ٤٨$ ، ر = ٢ ، ن = ١٢ − ٥ + ١ = ٨

$جـ_ن = \frac{أ (1 - ر^ن)}{1 - ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$جـ_٨ = \frac{٤٨(1 - ٢^٨)}{2 - 1}$ بالتعويض عن: أ = ٤٨، ر = ٢، ن = ٨

$جـ_٨ = ٤٨ \times ٢٥٥ = ١٢٢٤٠$ بالتبسيط

فكر: هل يمكنك إيجاد المجموع فى المثال السابق بمعلومية أ ، ل ، ر ؟ كيف ذلك

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمة كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{1}{8} (٢)^{ر-1}$

ب) $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦ (\frac{1}{2})^{ر-1}$

مثال

تكوين المتتابعة الهندسية

(٤) إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون: جـ$_{ن}$ = ١٢٨ - ٢$^{٧-ن}$
فأوجد المتتابعة ثم أوجد حدها السابع.

الحل

بوضع: ن = ١ ∴ جـ$_{١}$ = ١٢٨ - ٢$^{٧-١}$ = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤ أي أن ع$_{١}$ = (٦٤)

بوضع: ن = ٢ ∴ جـ$_{٢}$ = ١٢٨ - ٢$^{٧-٢}$ = ١٢٨ - ٣٢ = ٩٦

∵ ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = جـ$_{٢}$ ∴ ٦٤ + ع$_{٢}$ = ٩٦ ∴ ع$_{٢}$ = ٩٦ - ٦٤ = (٣٢)

بوضع: ن = ٣ جـ$_{٣}$ = ١٢٨ - ٢$^{٧-٣}$ أي أن جـ$_{٣}$ = ١٢٨ - ١٦ = ١١٢

∵ ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ + ع$_{٣}$ = جـ$_{٣}$ أي أن ع$_{٣}$ = جـ$_{٣}$ - جـ$_{٢}$

∴ ع$_{٣}$ = ١١٢ - ٩٦ = (١٦)

∴ المتتابعة هى: (٦٤، ٣٢، ١٦،) ، ع$_{٧}$ = أ ر^{٦} = ٦٤ ($\frac{١}{٢}$)^{٦} = ١

لاحظ أن: مما سبق يمكن استنتاج أن ع$_{ن}$ = جـ$_{ن}$ - جـ$_{ن-١}$ ومنها نوجد قيمتى أ، ر ومن ذلك فإن

ع$_{٧}$ = جـ$_{٧}$ - جـ$_{٦}$ = (١٢٨ - ٢$^{٧-٧}$) - (١٢٨ - ٢$^{٦-٧}$) = - ١ + ٢ = ١

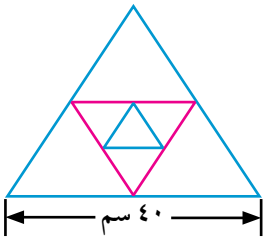
حاول أن تحل

(٤) إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون جـ$_{ن}$ = ١٠٢٤ - ٢$^{١٠-ن}$ فأوجد المتتابعة .

(٥) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١، مجموع حدودها ٣٦٤

مثال

(٥) **الربط بالهندسة** يبين الشكل المقابل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم، رسم مثلث آخر نحو الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر، ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط.



الحل

محيط المثلث الأكبر = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

محيط المثلث الأصغر التالى = ٣ × ٢٠ = ٦٠

محيط المثلث التالى للمثلث الأصغر = ٣ × ١٠ = ٣٠

أى أن النمط هو: ١٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، إلى ١٠ حدود

مجموع المحيطات = ١٢٠ + ٦٠ + ٣٠ + ... وهى مجموع متسلسلة هندسية

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

بالتعويض عن: أ = ١٢٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

وبالتبسيط واستخدام الآلة الحاسبة جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٢٠(١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}}$ ≃ ٢٤٠

تذكر أن

محيط المثلث المتساوى الأضلاع = ٣ × طول ضلعه

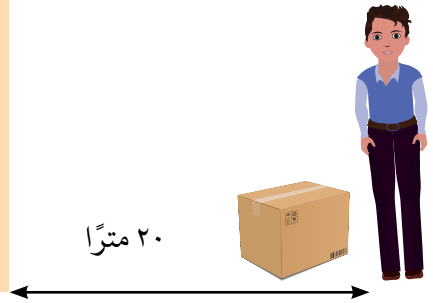
حاول أن تحل

٦ **الربط بالأحياء:** إذا تضاعفت زراعة البكتيريا كل يوم (فى أحد الأوساط الغذائية)، فكم يكون عدد البكتيريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها فى اليوم الأول ٨٠٠

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

Infinite geometric series

فكر و ناقش



أراد زياد نقل صندوق فى اتجاه حائط يبعد عنه مسافة ٢٠ مترًا على عدة مراحل بحيث تبلغ المسافة التى ينقل إليها الصندوق تساوى نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة، فهل يستطيع زياد أن يصل إلى الحائط؟

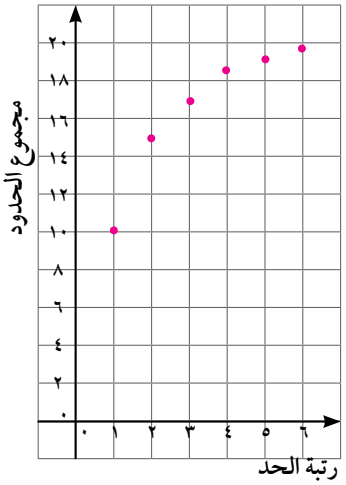
يُمكنك الإجابة على ذلك من خلال دراستك المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

تعريف ٢

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود ، و إذا كان مجموعها عددًا حقيقيًّا، فإنها تكون متقاربة؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقى، أما إن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة.

فى بند فكر وناقش مجموع المسافات التى يقطعها زياد تُعطى بالمتسلسلة:

١٠ + ٥ + ٢,٥ + ١,٢٥ + ... وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من ٢٠ مترًا، وهو المجموع الفعلي لها، وبالتالى يمكن اعتبار أن زياد يصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدود المتتابعة إلى ما لا نهاية، والشكل الموضح يبين التمثيل البيانى للمجموع حـ$_{ن}$ لذلك فإن المتسلسلة التقاربية يقترب مجموعها من عدد حقيقى حيث |ر|< ١ وتكون غير تقاربية إذا لم يقترب المجموع من عدد حقيقى حيث |ر|≥١



تذكر أن

إذا كانت |ر| > ١ فإن:
- ١ > ر > ١
وإذا كانت |ر| ≤ ١ فإن:
ر ≤ ١ أو ر ≥ - ١

مثال

٦ أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لانهائى من حدودها ؟ فسِّر إجابتك

أ ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...

ب ٢٤ + ٣٦ + ٥٤ + ...

الحل

أ نوجد أساس المتسلسلة الهندسية ر = $\frac{٤٥}{٧٥} = \frac{٣}{٥}$ فالمتسلسلة تقاربية لأن: - ١ < $\frac{٣}{٥}$ < ١

ب نوجد أساس المتسلسلة الهندسية ر = $\frac{٣٦}{٢٤} = \frac{٣}{٢}$ فالمتسلسلة تباعدية لأن: $\frac{٣}{٢}$ > ١

حاول أن تحل

(٧) أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لانهائى من حدودها ؟ فسِّر إجابتك

أ ٧ + ٢١ + ٦٣ + ... ب $\frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} + ٣ + ٢ + ...$

مجموع المتتابعات الهندسية غير المنتهية

Sum of Infinite Geometric Series

علمنا أن مجموع ن حدًّا من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن ر^{ن} يقترب من صفر عندما تكون - ١ < ر < ١

ويصبح المجموع: $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

تفكير ناقد: هل يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية عندما |ر| ⩾ ١ ؟ فسِّر إجابتك .

تعبير شفهى: هل يمكنك إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية فى بند (عمل تعاونى) ؟ أوجد قيمتى أ، ر واستخدم قانون مجموع عدد غير منته من حدود متسلسلة هندسية.

مثال

(٧) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

أ $\frac{٨١}{٨} + \frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} + ...$ ب $\frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٦} + \frac{٢٥}{٢٤} + ...$

الحل

أ نوجد أساس المتتابعة الهندسية: ر = $\frac{٢٧}{٤} \div \frac{٨١}{٨} = \frac{٨}{٨١} \times \frac{٢٧}{٤} = \frac{٢}{٣}$

∵ - ١ < $\frac{٢}{٣}$ < ١ ∴ يوجد للمتسلسلة مجموع

∵ أ = $\frac{٨١}{٨}$ ، ر = $\frac{٢}{٣}$ وبالتعويض فى صيغة المجموع جـ$_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

∴ جـ$_{\infty} = \frac{\frac{٨١}{٨}}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{٨١}{٨}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢٤٣}{٨}$

ب نوجد أساس المتتابعة الهندسية: ر = $\frac{٥}{٦} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٦} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٤}$

∵ $\frac{٥}{٤}$ > ١ ∴ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع

حاول أن تحل

(٨) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

أ ٩٦ – ٤٨ + ٢٤ – ١٢ + ... ب $\frac{٧}{٥} + \frac{٢١}{١٠} + \frac{٦٣}{٢٠} + ...$

مثال

استخدام رمز التجميع

(٨) أوجد $\sum_{ن=١}^{\infty} ٤٢ (\frac{٦}{٧})^{ن-١}$

الحل

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

بالتعويض عن: $أ = ٤٢$ ، $ر = \frac{٦}{٧}$: فتكون $جـ_{\infty} = \frac{٤٢}{\frac{٦}{٧} - ١} = ٢٩٤$

حاول أن تحل

(٩) أوجد: $\sum_{ن=١}^{\infty} ٥٦ (\frac{٣}{٤})^{ن-١}$

تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادى

Converting a Recurring Decimal Into a Common Fraction

مثال

(٩) ضع $٠,\overline{٤٣٢}$ على صورة كسر اعتيادى

الحل

أولا: باستخدام مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$٠,\overline{٤٣٢} = ٠,٤٣٢ + ٠,٠٠٠٤٣٢ + ٠,٠٠٠ ٠٠٠ ٤٣٢ + ...$

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

بوضع $أ = \frac{٤٣٢}{١٠٠٠}$ ، $ر = \frac{١}{١٠٠٠}$ فتكون $جـ_{\infty} = \frac{\frac{٤٣٢}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠٠}}$

بالتبسيط $جـ_{\infty} = \frac{٤٣٢}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠٠}{٩٩٩} = \frac{١٦}{٣٧}$

حاول أن تحل

(١٠) ضع كلًّا من الكسور العشرية التالية على صورة كسر اعتيادى $٠,\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٦٣}$ ، $٠,\overline{٤٦}$ ، $٠,٦\overline{٥٤}$

تطبيقات على المتتابعات

Applications on the Sequences

مثال

(١٠) يمثل الجدول التالى الدخل الشهرى لأحد العمال فى خلال خمسة أعوام متتالية مقدرا بالجنيه المصرى علما بأن هذا الدخل يخضع لمتتابعة هندسية.

العام	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الخامس
الدخل الشهرى بالجنيه	٢٨٨	٤٣٢	٦٤٨		

أ) أوجد أساس المتتابعة الهندسية.

ب) أوجد الدخل الشهرى لهذا العامل خلال كل من العامين الرابع والخامس.

جـ) أوجد بالجنيه المصرى جملة ما يستحقه هذا العامل خلال هذه المدة.

د) أوجد المتوسط الشهرى لدخل هذا العامل خلال تلك المدة.

الحل

أ) ∵ المتتابعة هندسية ∴ الأساس (ر) $= \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}} = \frac{٤٣٢}{٢٨٨} = \frac{٣}{٢}$

ب الدخل الشهرى خلال العام الرابع = ع٤ × ر = ٦٤٨ × $\frac{٣}{٢}$ = ٩٦٢ جنيهًا،

الدخل الشهرى خلال العام الخامس = ع٥ × ر = ٩٦٢ × $\frac{٣}{٢}$ = ١٤٥٨ جنيهًا

ج جملة ما يستحقه العامل = ١٢ (٢٨٨ + ٤٣٢ + ٦٤٨ + ... إلى ٥ حدود)

∵ جـن = $\frac{أ_١ (١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

∴ جـن = $\frac{١٢ \times ٢٨٨ \ [١ - (\frac{٣}{٢})^{٥}]}{١ - \frac{٣}{٢}}$ = ٤٥٥٧٦ جنيه

ويستخدم ترتيب مفاتيح الآلة الحاسبة على النحو التالى:



(3 ÷ 2) χ■ 5 REPLAY - 1 = * 1 2 *

=) 1 - 2 ÷ 3 (= 8 8 2

د المتوسط الشهرى لدخل العامل = $\frac{\text{جملة الدخل}}{\text{عدد الشهور}}$ = $\frac{٤٥٥٧٦}{١٢ \times ٥}$ = ٧٥٩,٦ جنيه

تفكير ناقد: هل يمكن إيجاد المتوسط الشهرى لدخل العامل وذلك بقسمة (٢٨٨ + ٤٣٢ + ٦٤٨ + ... إلى ٥ حدود) على ٥ سنوات؟ فسِّر ذلك.

حاول أن تحل

(١١) الربط بالفيزياء: تم دحرجت كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ مترا ثم بدأت تقطع ٦٠٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة . فأوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف.

تمارين (١ - ٦)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ،) هو:

أ ١٦ ب ٢٠ ج ٢٤ د ٣٠

(٢) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو ١٣$\frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول يساوى:

أ ٦ ب ٨ ج ٩ د ١٢

(٣) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى:

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{٧}{٨}$ د $\frac{٣}{٤}$

(٤) متتابعة هندسية مجموع ن حدًّا الأولى منها يعطى بالعلاقة جـن = ٣$^{ن+١}$ – ٤ فإن الحدالثالث منها يساوى:

أ ١٨ ب ٢٣ ج ٥٤ د ٧٧

(٥) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى:

أ ٠,٥ ب ٠,٣٣٣ ج ٠,٢٥ د ٠,٦٦٦

اكتشف الخطأ:

(٦) يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية عندما تكون |ر| ⩾ ١

(٧) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ،) أكبر من ضعف حدها الأول.

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٨) أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

أ (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ... إلى ٦ حدود)

ب (١٢٥ ، ٢٥ ، ٥ ، إلى ٦ حدود)

ج (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ، ٧٦٨)

(٩) أى من المتتابعات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن:

أ (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ،)

ب (٣ ، -٦ ، ١٢ ،)

ج $(\frac{١}{٣٢} ، \frac{١}{١٦} ، \frac{١}{٨} ،)$

د $(٢ \times ٥^{١-ن})$

(١٠) أوجد مجموع عدد غير منته من حدود كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

أ $(٣ ، \sqrt{٣} ، ١ ، ...)$

ب $(ع_ن) = (٣^{-ن})$

(١١) ضع كلا من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسور اعتيادية باستخدام المتتابعة الهندسية اللانهائية: $٠,\overline{٧}$ ، $٠,٢\overline{٤}$ ، $٠,\overline{٨٦٣}$

(١٢) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤

(١٣) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣

(١٤) كم حدًّا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١.

(١٥) أثبت أن المتتابعة $(ع_ن) = (١٠ \times ٢^{ن-٢})$ هى متتابعة هندسية، وأوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول التى مجموعها ٢٥٥٥

(١٦) أوجد عدد حدود المتتابعة الهندسية التى مجموع حدودها $\frac{٤}{٩}$ ١٢١ وحدها الأول يساوى ٨١ وحدها الأخير يساوى $\frac{١}{٩}$.

(١٧) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ع_٢ = ٦$ ، $ع_٣ - ع_١ = ٩$. أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًّا الأولى منها.

(١٨) متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٧,٧٥ ومجموع الخمسة حدود التالية لها = ٢٤٨. أوجد هذه المتتابعة.

(١٩) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منتهية = ١٨ ، الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$. فما مجموعها؟

٢٠ إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية $\frac{٣٧٥}{٤}$ ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ٩٠ ، فأثبت أنه توجد متتابعتان وأوجدهما.

٢١ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥.

٢٢ متتابعة هندسية غير منتهية، حدودها موجبة، يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{١٣٥}{٢}$. أوجد هذه المتتابعة.

٢٣ $(ع_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ع_١ + ع_٤ = ٧٠$ ، $ع_٢ + ع_٣ = ٦٠$ أثبت أنه توجد متتابعتان، وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود إحداهما، وأوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الأول.

٢٤ $(ع_ن)$متتابعة هندسية فيها $ع_٢ - ع_٦ = ٤٥$ ، جـ$_٤$ الأولى= ١٨٠ ، أوجد المتتابعة، وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع.

٢٥ متتابعة هندسية غير منتهية، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة.

٢٦ متتابعة هندسية غير منتهية، وأى حد فيها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، إذا كان حدها الرابع = ٣. فأوجد هذه المتتابعة.

٢٧ **الربط بالتعدين:** منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد إنتاج المنجم فى السنة الثامنة، ثم احسب إنتاج المنجم خلال الثمان سنوات الأولى.

٢٨ **الربط بالدخل:** بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٠,٦ ٪ من مرتب السنة السابقة. احسب مرتبه فى السنة السابعة، ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى.

تطبيقات فى المشكلة السكانية:



نشاط

إذا كان عدد سكان إحدى المدن فى نهاية عام ٢٠٠٠ يساوى $\frac{١}{٢}$ مليون نسمة، وأصبح عام ٢٠١٦ يساوى ٨ ملايين نسمة ، فإذا كانت الزيادة السكانية ثابتة وتخضع لمتتابعة حسابية.

احسب:

١- النسبة الثابتة للزيادة السكانية.

٢- المعادلة الخطية لتقدير عدد السكان.

٣- قدر عدد السكان عام ٢٠٢٠.

٤- قدر عدد السكان عام ٢٠٢٥.

٥- بالاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات. اكتب بحثا عن الزيادة المطردة فى عدد السكان فى مصر، ومدى تأثيرها على الدخل القومى والحلول المقترحة لمعالجة هذه المشكلة السكانية.

ملخص الوحدة

المتتابعة: هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة صـ+ أو مجموعة جزئية منها ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ع مع ملاحظة الآتى:

- حدود المتتابعة هى صور عناصر مجالها.
- الرمز $(ع_ن)$ يعبر عن المتتابعة بينما الرمز $ع_ن$ يعبر عن حدها النونى.
- تخضع المتتابعة لترتيب عناصرها، ويمكن تكرار هذه العناصر.
- تكون المتتابعة **منتهية** إذا كان عدد حدودها منتهيًا، وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته.
- تسمى المتتابعة **تزايدية** إذا كان $ع_{ن+١} > ع_ن$
- تسمى المتتابعة **تناقصية** إذا كان $ع_{ن+١} < ع_ن$
- تسمى المتتابعة **ثابتة** إذا كانت **جميع حدودها متساوية**
- تمثل المتتابعة **بيانيًّا** على أنها دالة، وذلك من خلال تمثيل الأزواج المرتبة بنقاط منفصلة فى المستوى الإحداثى.

المتسلسلة: هى مجموع حدود المتتابعة، ويستخدم رمز التجميع " $\sum$ " لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

- **المتسلسلة المنتهية:** تحتوى على عدد محدود من العناصر وتكتب بالصورة $\sum_{ر=١}^{ن} (ع_ر)$
- **المتسلسلة غير المنتهية:** لا يمكن حصر عدد حدودها وتكتب بالصورة $\sum_{ر=١}^{\infty} (ع_ر)$

المتتابعة الحسابية: هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدار ثابتًا يسمى أساس المتتابعة، ويرمز له عادة بالرمز (ى) حيث ى = $ع_{ن+١} - ع_ن$ لكل ن ∈ صـ+

- يمكن تكوين المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ى).
- العلاقة بين ن، $ع_ن$ هى $ع_ن$ = ىن + ب حيث ى، ب ثابتان ، ى أساس المتتابعة، وهذه علاقة خطية تمثل بيانيًّا بمجموعة من النقاط.
- تكون المتتابعة تزايدية إذا كان ى > ٠ ، وتكون تناقصية إذا كانت ى < ٠
- الحد النونى للمتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ التى حدها الأول أ وأساسها ى يعطى بالعلاقة: $ع_ن$ = أ + (ن − ١) ى
- إذا كانت أ ، ب، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن ب تعرف بالوسط الحسابى بين العددين أ ، جـ حيث ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$
- يمكن إدخال عدة أوساط حسابية بين عددين لتكوين متتابعة حسابية ، ويكون عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢

- مجموع ن حدًّا الأولى من متسلسلة حسابية:

أولا: بمعلومية حدها الأول والأخير: جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

ثانيا: بمعلومية حدها الأول والأساس: جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ = [٢ أ + (ن - ١) ء]

المتتابعة الهندسية: تسمى المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ ≠ ٠ متتابعة هندسية إذا كان $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ = مقدارًا ثابتًا لكل ن ∈ صـ$_{+}$ ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر)

- الحد النونى للمتتابعة الهندسية (ع$_{ن}$) التى حدها الأول أ وأساسها ر يعطى بالعلاقة ع$_{ن}$ = أ × ر$^{ن-١}$

- إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسى بين العددين أ ، جـ حيث ب = ± $\sqrt{أ جـ}$

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى:

- الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.
- الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين متساويين يساوي وسطهما الهندسى.
- مجموع ن حدًّا الأولى من متسلسلة هندسية:

أولا: بمعلومية حدها الأول والأساس: جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١-ر^{ن})}{١-ر}$ ، ر ≠ ١

ثانيا: بمعلومية حدها الأول والأخير: جـ$_{ن}$ = $\frac{أ-ل ر}{١-ر}$ ، ر ≠ ١

المتتابعة الهندسية غير المنتهية: لها عدد لانهائى من الحدود يكون لها مجموع إذا كان |ر| < ١

- مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية جـ$_{∞}$ = $\frac{أ}{١-ر}$ ، ر ≠ ١

تمـــارين عامة

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) تسمى المتتابعة التى قاعدتها: $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{٣ن - ٢}$ بأنها متتابعة:

أ تزايدية　　ب تناقصية　　ج تذبذبية　　د ثابتة

(٢) تكتب المتسلسلة الحسابية: ٣ + ٧ + ١١ + ... + ٣٥ باستخدام رمز المجموع كالآتى:

أ $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٤ر - ١)　　ب $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٢ر - ١)　　ج $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٣ر - ٤)　　د $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٣ر - ٤)

(٣) إذا كان ٢أ + ٢ ، ٦أ – ٢ ، ٧أ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى:

أ ١　　ب ٢　　ج ٣　　د ٤

(٤) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=٣}^{٨}$ (٢ر + ١) يساوى:

أ ٦٤　　ب ٧٢　　ج ٧٦　　د ٨٠

(٥) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة جـ$_ن$ = ٣ (٣^ن – ١) فإن الحد الثالث منها يساوى:

أ ٢٤　　ب ٣٦　　ج ٤٨　　د ٥٤

(٦) بين أيًا من المتتابعات ($ع_ن$) تزايدية وأيها تناقصية، وأيها غير ذلك فى كل مما يأتى:

أ ($ع_ن$) = (٣ - ٢ن)　　ب ($ع_ن$) = (٢) $(\frac{٣}{٢})^{ن-١}$　　ج ((-١)^ن (ن + ١))

(٧) إذا علمت أن $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر = $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر^٢ = $\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$ ، فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$ قيمة كل مما يأتى:

أ $\sum_{ر=١}^{ن}$ (ر + ٢)　　ب $\sum_{ر=١}^{٨}$ (ر^٢ - ٣)

(٨) حدد أيًا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها هندسية ثم أوجد الأساس لكل منها.

أ (٢١ ، ١٤ ، ٧ ، ...)　　ب (-٧ ، -١٢ ، -١٧ ، ...)　　ج (-٣ ، ١٢ ، -٤٨ ، ...)

د ($\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$ ، ...)　　هـ ($\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، ...)　　و ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ...)

(٩) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) أوجد:

أ قيمة حدها الثامن.　　ب رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢

(١٠) ($ع_ن$) متتابعة حسابية فيها $ع_٦$ = ١٦ ، $ع_{٢٠}$ = - ٢٦. أوجد هذه المتتابعة.

(١١) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع يساوى ٨٨، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة.

(١٢) إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة.

(١٣) متتابعة هندسية حدها الأول = ٧، حدها الخامس = ١١٢. أوجد هذه المتتابعة.

(١٤) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الأول وحدها الخامس يساوى $\frac{١}{١٢٥}$ أثبت أن هناك حلين، ثم أوجد المتتابعتين.

(١٥) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية حيث $ع_ن = ٧ \times (٣)^{ن-١}$. أوجد الوسط الهندسى بين $ع_٣ ، ع_٧$

(١٦) إذا كانت ٤، ب، جـ فى تتابع حسابى، وكانت ٢، ب + ٣ ، ٥ جـ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة كل من ب، جـ

(١٧) إذا كانت $\frac{١}{٢}$ أ ، ب ، جـ كميات موجبة فى تتابع هندسى فأثبت أن ٤ب < أ + ٢جـ

(١٨) **الربط بالانتاج:** بئر إنتاجها من البترول فى السنة الأولى ٥٦٠ ألف برميل، وكان إنتاجها يتناقص سنويًا بمعدل ٤ ٪ عن إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد أقصى إنتاج لهذه البئر.

(١٩) **الربط بالهندسة:** مستطيل طوله ١٦ سم وعرضه ١٢ سم ، نصفت أضلاعه ثم نصفت أضلاع الشكل الحادث من توصيل منتصفات الأضلاع وهكذا بتكرار ما سبق إلى اللانهاية. أوجد مجموع محيطات الأشكال المرسومة.

(٢٠) **الربط بالصحة:** يتناول مريض نوعا من الدواء، وقد نصحه الطبيب أن يُقلِّل عدد حبات هذا الدواء بمعدل ٣ حبات كل أسبوع عن الأسبوع الذى يسبقه مباشرة ، فإذا بدأ المريض بتناول ٢١ حبة من الدواء فى الأسبوع الأول، بعد كم أسبوعًا سوف يتوقف المريض تمامًا عن استخدام هذا الدواء؟

(٢١) **الربط بالأجور:** يتقاضى عامل راتبًا شهريًا قدرة ١٢٠٠ جنيه فى العام الأول ثم يزداد أجره بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من مرتب السنة السابقة لها مباشرة. اكتب باستخدام رمز التجميع مجموع ما يتحصل عليه العامل من أجر خلال خمس سنوات، ثم أوجد هذا المجموع.

(٢٢) **الربط بترشيد المياه:** تندفع المياه بمعدل ٢٥ لترا فى الدقيقة الأولى من صنبور للمياه، ثم تزداد بعد ذلك بمعدل لترين فى كل دقيقة تالية لها. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما يصب من الماء ٨٨٠ لترا ؟

(٢٣) كرة إذا سقطت من ارتفاع معين عن سطح الأرض، فإنها ترتد إلى ثلثى الارتفاع الذى سقطت منه. فإذا أُسقطت من ارتفاع ٩٠ مترًا، فأوجد مجموع المسافات التى تقطعها حتى تسكن؟

(٢٤) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٨١ ، حدها السادس يساوى $\frac{١}{٣}$ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الثالث.

اختبار تراكمى

(١) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات:

أ) $س^{٢} - ٣س - ٤ =$ صفر .

ب) $س + \frac{٢}{س} = ٣$.

(٢) أوجد فى ع مجموعة حل كل زوج من المعادلات الآتية:

أ) $س + ٢ص = ٥ ، ٢س - ص = ٥$

ب) $أ - ب = ١ ، أ + ٢ب = ١٠$

جـ) $س - ص = ٢ ، س ص = ٣$

د) $٣أ + ٥د = ٢١ ، ٢أ - ٧د = -١٧$

(٣) حلل كلًّا مما يأتى تحليلًا كاملًا:

أ) $أ ر^{٣} - أ ر$

ب) $س^{٢} ص + س ص^{٢} - ٢ س ص$

جـ) $أ + أ ر + أ ر^{٢}$

د) $١ + ر + ر^{٢} + ر^{٣}$

(٤) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

أ) $٢^{س-١} = \frac{١}{٨}$

ب) $(-\frac{١}{٢})^{ن+٢} = \frac{١}{٦٤}$

جـ) $٢^{ن-٥} < ٧$

د) $(\frac{١}{٢})^{ن+٢} > ٠,٠١$

مقارنات: بين أوجه الشبه والاختلاف بين كل من:

(٥) المتتابعات والمتسلسلات.

(٦) الحد النونى للمتتابعة الحسابية والحد النونى للمتتابعة الهندسية.

(٧) مجموع المتسلسلة الحسابية ومجموع المتسلسلة الهندسية.

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

أوجد قيمة الحد الأول (أ) فى كل من المتتابعات أو المتسلسلات الآتية:

(٨) المتتابعة الحسابية التى فيها: ى = ٣ ، $ع_{٥}$ = ٣٢

(٩) المتتابعة الهندسية التى فيها: ر = $\frac{١}{٢}$ ، $ع_{٤} = \frac{١}{١٦}$

(١٠) المتسلسلة الحسابية التى فيها: ى = ٦ ، $جـ_{١٦}$ الأولى = ١٢٨

(١١) المتسلسلة الهندسية التى فيها: ر = ٢ ، $جـ_{٨}$ الأولى = ٢٥٥

(١٢) المتسلسلة الهندسية التى فيها: ر = $\frac{١}{٢}$ ، $جـ_{\infty}$ = ١٢٨

أسئلة ذات إجابات متعددة:

(١٣) اكتب ثلاث متتابعات بحيث تكون إحداها حسابية والثانية هندسية والثالثة ليست حسابية أو هندسية وتبدأ كلٌّ منها كالاتى: ٢ ، ٦ ، ...

(١٤) اكتب ثلاث متتابعات هندسية الحد الأول لكل منها ١٦ بحيث تكون الأولى تزايدية والثانية تناقصية والثالثة ثابتة، ثم أوجد مجموع إحدى هذه المتتابعات إلى مالانهاية.

(١٥) اكتب المتسلسلة الهندسية ٦٤ + ٣٢ + ١٦ + ... بطريقتين مختلفتين باستخدام رمز المجموع.

(١٦) تبرير: متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع ومتى لا يكون لها مجموع ؟ وضح تبريرك.

تطبيقات حياتية:

أسئلة ذات إجابات طويلة:

(١٧) إذا كونت (١٥ ، ٣ك + ٢ ، ٤ ك – ٥ ، ...) متتابعة حسابية فأوجد قيمة ك.

(١٨) أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الخامس والعاشر يساوى ٢٠ ، حدها السابع يساوى ثلاثة أمثال حدها الرابع.

(١٩) متتابعة حسابية حدها العشرون يساوى ٤١، يزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة. أوجد هذه المتتابعة.

(٢٠) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ع_٢ = ٥$ ، $\frac{ع_٧}{ع_٤}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ أوجد هذه المتتابعة.

(٢١) أ ، ٢ ب ، ٢جـ ، ٥ ء كميات موجبة فى تتابع حسابى أثبت أن: ٢(ب^٢ + جـ^٢) > أ جـ + ٥ ب ء.

(٢٢) متتابعة حسابية فيها $ع_{١٢} = ٣٨$ ، $ع_{٣٥} = ٢٤٥$. أوجد مجموع الخمسة عشر حدًّا الأولى منها.

(٢٣) متتابعة حسابية فيها مجموع الحدين التاسع عشر والعشرين يساوى ١٤٤ ، مجموع الحدين العشرين والحادى والعشرين يساوى ١٥٢ أوجد:

أ الحد العشرين.

ب عدد الحدود اللازم أخذه من المتتابعة ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٦٠

(٢٤) متتابعة حسابية حدودها موجبة، مجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوى ٥٠، وحاصل ضرب حديها الثانى والثالث يساوى ١٥٠. أوجد هذه المتتابعة، ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حدًّا الأولى منها.

(٢٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة، مجموع الاثنى عشر حدًّا الأولى منها يساوى ٢٧٣ مرة. قدر مجموع الأربعة حدود الأولى منها. أوجد أساس المتتابعة، و إذا كان حدها الثامن = ٦٤٠. أوجد المتتابعة.

(٢٦) إذا كان مجموع السبعة حدود الأولى من متتابعة هندسية هو ل، ومجموع السبعة حدود التالية لها هو م. فاثبت أن أساس المتتابعة = $\sqrt[٧]{\frac{م}{ل}}$



الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق
Permutations, Combinations

مقدمة الوحدة

العد من المهارات الأساسية فى الرياضيات ، فكثيرًا ما تواجهنا مسائل نحتاج فى حلها إلى إجراء عمليات عد بطرق مختلفة ، ومن خلال هذه الوحدة سوف نتعرف على إستراتيجيات مختلفة للعد، ومنها مبدأ العد الأساسى، ومن أهم تطبيقاته:

التباديل التى تستخدم فى معرفة عدد الطرق التى يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة.

التوافيق: وهى الاختيار دون مراعاة الترتيب.

ولقد كان للعلماء العظام مثل عمر الخيام وإسحق نيوتن وبسكال الدور الأكبر فى هذا المجال والذى لايزال ساريًا حتى اليوم.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق والعلاقة بينها.
- يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*
- مبدأ العد المشروط *Conditional Principle of Counting*
- عملية *Operation*
- شجرة بيانية *Tree Diagram*
- مضروب *Factorial*
- تباديل *Permutations*
- توافيق *Combinations*
- عناصر *Elements*
- ترتيب *Order*
- لجنة *Committee*
- مجموعة جزئية *Subset*

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): مبدأ العد .

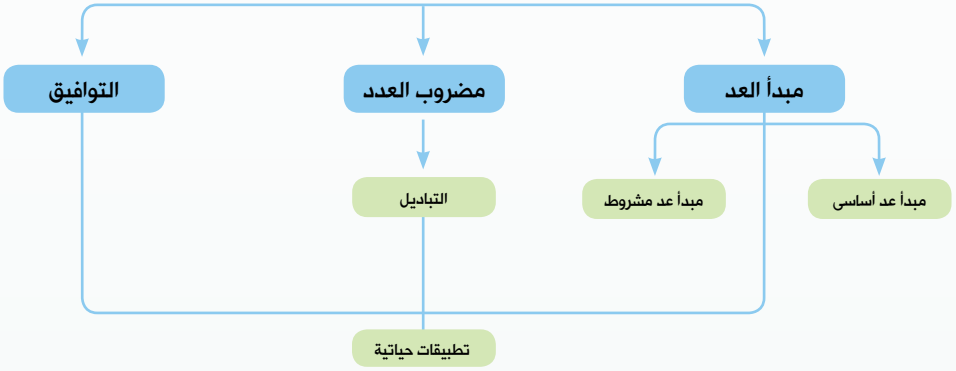
الدرس (٢ - ٢): التباديل.

الدرس (٢ - ٣): التوافيق.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية — *Scientific Calculator*
- برامج رسومية للحاسوب — *Graphical Computer Programs*

مخطط تنظيمى للوحدة



٢ - ١ مبدأ العد

Fundamental Principle of Counting

سوف تتعلم
- مفهوم مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- مبدأ العد الأساسى.
- مبدأ العد المشروط.

المصطلحات الأساسية
- مبدأ العد الأساسى
 Fundamental Counting Principle
- عملية *Operation*
- شجرة بيانية *Tree Diagram*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
 Scientific Calculator
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.

فكر و ناقش

إذا طلب منك ارتداء قميص وبنطلون من بين ٢ قميص و٣ بنطلون.
فكم عدد طرق الاختيار؟



مثال

(١) كم عدد طرق اختيار طالب من بين ثلاثة طلاب (أشرف - محمد - حسن) وطالبة من بين طالبتين (سمر - منى).

الحل

فى هذا المثال نجد من السهل معرفة عدد طرق الاختيار، فمثلا يمكننا اختيار أشرف ، سمر أو أشرف ، منى أو محمد ، منى أو حسن ، سمر... الخ وسوف نعبر عن ذلك بالمخطط البيانى التالى ويسمى بمخطط الشجرة البيانية:

الطلاب	الطالبات	الأختيار
اشرف	سمر	اشرف ، سمر
	منى	أشرف ، منى
محمد	سمر	محمد ، سمر
	منى	محمد ، منى
حسن	سمر	حسن ، سمر
	منى	حسن ، منى

عدد طرق اختيار طالب من ثلاثة طلاب = ٣ طرق
عدد طرق اختيار طالبة من طالبتين = ٢ طريقة
∴ عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ = ٦ طرق

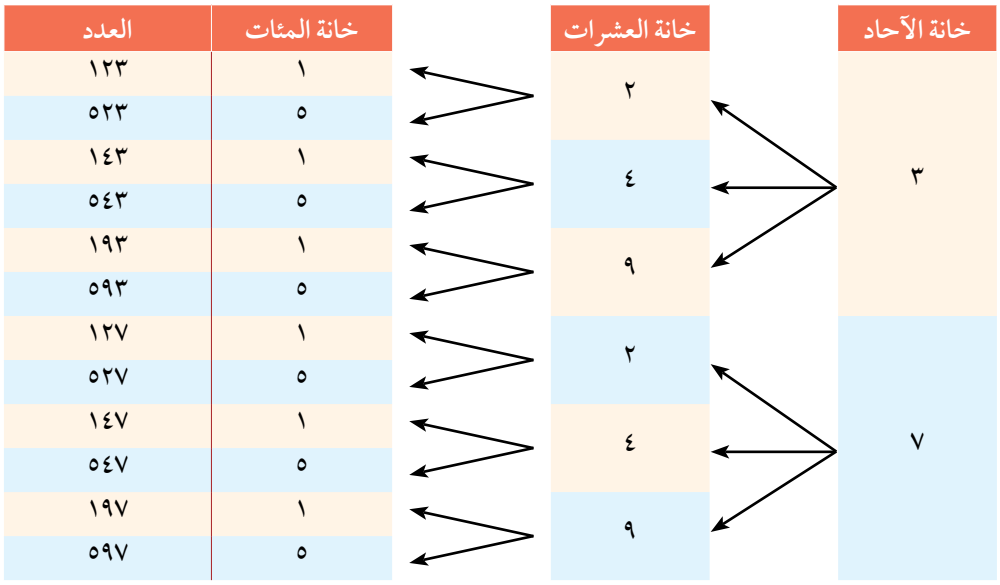
حاول أن تحل

(١) فى فكر وناقش كم عدد طرق الاختيار الممكنة؟

مثال

(٢) كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢، ٤، ٩} ورقم المئات من العناصر {١، ٥}؟

الحل



خانة الآحاد	خانة العشرات	خانة المئات	العدد
٣	٢	١	١٢٣
		٥	٥٢٣
	٤	١	١٤٣
		٥	٥٤٣
	٩	١	١٩٣
		٥	٥٩٣
٧	٢	١	١٢٧
		٥	٥٢٧
	٤	١	١٤٧
		٥	٥٤٧
	٩	١	١٩٧
		٥	٥٩٧

من الشجرة البيانية نجد أن:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد × عدد طرق اختيار رقم العشرات × عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ طريقة

الأمثلة السابقة توضح التعريف الآتى:

تعلم

مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*

تعريف: إذا كان عدد طرق إجراء عمل مايساوى $م_1$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_2$ طريقة، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث $م_3$ طريقة وهكذا... فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معا = $م_1 \times م_2 \times م_3 \times ... \times م_ن$

مثال

(٣) كم عدد الاختيارات التى يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروبًا واحداً من المشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو)

الحل

عدد طرق اختيار الوجبة = ٣ طرق ، عدد طرق اختيار المشروب = ٣ طرق

عدد طرق الاختيار = ٣ × ٣ = ٩ طرق.

حاول أن تحل

(٢) مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطة ، ٣ أنواع من المشروبات. كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يوميًّا على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من كل من الفطائر والسلاطة والمشروبات؟

مثال

(مبدأ عد مشروط) *Conditional Principle of Counting*

(٤) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}؟

الحل

نبدأ بخانة المئات المشروطة (لايمكن استخدام الصفر جهة اليسار)

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٣

∴ عدد الطرق الكلية = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة

الخانة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٤

حاول أن تحل

(٣) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٧}، بحيث يكون رقم العشرات زوجيًّا.

تمـارين (٢ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى:

أ) ١ ب) ٤ + ٤ ج) ٤ × ٤ د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٢) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٥، ٣، ٠، ٢} يساوى:

أ) ٣ × ٢ ب) ٤ × ٢ ج) ٣ × ٣ د) ٣ × ٤

(٣) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣، ٦، ٨} تساوى:

أ) ٨ × ٦ × ٣ ب) ٤ × ٣ × ٣ ج) ٤ × ٣ × ٢ د) ٢ × ٣ × ١

(٤) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢، ٣، ٥}؟

(٥) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذ ة من العناصر {٢، ٣، ٦، ٨} بحيث يكون رقم الآحاد ٦؟

(٦) تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها؟ بفرض أنه لايوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص؟

(٧) كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢، ٥، ٨، ٩} بحيث تكون أصغر من ٩٠٠؟

(٨) إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار ، أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.

٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل

Factorial of a Number - Permutations

سوف تتعلم
- مضروب العدد
- التباديل

المصطلحات الأساسية
- مضروب العدد
 Factorial of a Number
- التباديل *Permutatuins*
- التباديل الجزئية
 Sub–Permutatuins

الأدوات المستخدمة
- آله حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

فكر و ناقش

استعن بما درسته فى الدرس السابق للإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) كم عدد طرق جلوس أربعة طلاب على ثلاثة مقاعد فى صف؟

٢) كم عدد طرق وقوف خمسة متسابقين على حافة حمام سباحة استعدادًا للقفز؟

تعلم

تعريف ١

المضروب: مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة ⌊ن ويساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى ن حيث:

⌊ن = ن (ن -١) (ن -٢)... ٣ × ٢ × ١

لاحظ أن:

- عندما ن = ٠ فإن ⌊٠ = ١ ◄ عندما ن =١ فإن ⌊١ =١
- ⌊٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤ ⌊٣ ،
 ⌊٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٦ ⌊٥

وبوجه عام فإن: ⌊ن = ن ⌊ن -١ حيث ن ∈ صـ+

مثال

١ **أ** أوجد $\frac{\lfloor ١٠}{\lfloor ٨}$ **ب** إذا كان ⌊ن = ١٢٠ فما قيمة ن

الحل

أ $\frac{\lfloor ١٠}{\lfloor ٨} = \frac{\lfloor ٨ ٩ \times ١٠}{\lfloor ٨} = ١٠ \times ٩ = ٩٠$

ب ⌊ن = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ ⌊ن = ⌊٥ لذلك فإن ن = ٥

حاول أن تحل

١ **أوجد:** **أ** $\frac{\lfloor ١٥}{\lfloor ١٢}$ **ب** $\frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٥} + \frac{\lfloor ٩}{\lfloor ٧}$

مثال

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة:- $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-٢} = ٣٠$

الحل

$\because \frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-٢}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\text{ل}_{\text{ن}-٢}}{\text{ل}_{\text{ن}-٢}} = ٣٠$ $\therefore$ ن (ن -١) = ٥ × ٦ $\therefore$ ن = ٦

٩ حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\frac{١}{\text{ل}_{\text{ن}}} + \frac{٢}{\text{ل}_{\text{ن}+١}} = \frac{٥٦}{\text{ل}_{\text{ن}+٢}}$ فأوجد قيمة ن

تفكير ناقد: إذا كان: ل$_{\text{أ}}$ = ل$_{\text{ن}}$ فما قيمة أ؟

التباديل Permutations

مثال تمهيدى: من مجموعة الأرقام {٢، ٣، ٥} كم عدد الأعداد التى يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة منها؟

الأعداد هى: ٥٣٢ ، ٣٥٢ ، ٥٢٣ ، ٢٥٣ ، ٣٢٥ ، ٢٣٥ يسمى كل عدد من هذه الأعداد تبديله للأرقام

وعددها = ٣ × ٢ × ١ وتكتب ل$_{٣}^{٣}$ وتقرأ (٣ لام ٣).

والجدول التالى يوضح ذلك:

الآحاد	العشرات	المئات
١	٢	٣

لذلك فإن التبديلة لعدد من الأشياء هى وضعها فى ترتيب معين.

تعريف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز ل$_{ر}^{ن}$ حيث:

ل$_{ر}^{ن}$ = ن(ن -١) (ن -٢) ... (ن - ر +١) حيث ر ≤ ن ، ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^{+}$

ل$_{٠}^{ن}$ = ١

فمثلا:

➤ ل$_{٣}^{٦}$ = ٦ × ٥ × ٤ = $\frac{١ \times ٢ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣} \times$ $\frac{\text{ل}_{٦}}{\text{ل}_{٦-٣}}$ = ل$_{٣}^{٦}$ $\frac{\text{ل}_{٦}}{\text{ل}_{٣-٦}}$

➤ ل$_{٥}^{٧}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × $\frac{١ \times ٢}{١ \times ٢}$ = $\frac{\text{ل}_{٧}}{\text{ل}_{٥-٧}}$

نستنتج مما سبق أن:

ل$_{ر}^{ن}$ = $\frac{\text{ل}_{ن}}{\text{ل}_{ن-ر}}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ر ≤ ن

استخدام الحاسبة

يرمز للتباديل بالحاسبة العلمية بالرمز $^{n}P_{r}$ ونستخدم فيها المفاتيح Shift × لحساب قيمة ل$_{٣}^{٥}$ بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح

5 Shift × 2 =

الجواب = ٢٠

مثال

(٣) أوجد قيمة كل من:

أ ل$_{٤}^{٧}$ ب ل$_{٤}^{٤}$ ج ل$_{٣}^{٤}$

الحل

أ ل$_{٤}^{٧}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠ ب ل$_{٤}^{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

ج ل$_{٣}^{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ ماذا تلاحظ من العبارتين ب ، جـ؟

حاول أن تحل

(٣) احسب قيمة كل من: (أ) $^{٥}ل_{٢} + {}^{٦}ل_{٣}$ (ب) $\frac{^{٥}ل_{٥}}{^{٥}ل_{٤}}$

مثال

(٤) أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد.

الحل

لدينا ٧ مقاعد يراد اختيار خمسة منها فى كل مرة

∴ عدد الطرق $= {}^{٧}ل_{٥} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٢٥٢٠$

استخدام الآلة الحاسبة: 7 SHIFT × (npr) 5 =

حاول أن تحل

(٤) كم يبلغ عدد الكلمات التى يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية.

مثال (الترتيب فى دائرة)

(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب ٤ أشخاص فى أربعة مقاعد على شكل دائرة ؟

الحل

فى هذه الحالة يجلس الشخص الأول بطريقة واحدة ، أما الشخص الثانى فيجلس بطرق عددها ٣ الشخص الثالث يجلس بطرق عددها ٢ والأخير يجلس بطريقة وحيدة

عدد طرق ترتيبهم $= ٣ \times ٢ \times ١ = \lfloor ٣ = ٦$

تفكير ناقد: هل يمكنك استنتاج عدد طرق ترتيب ن من الاشخاص فى دائرة؟

حاول أن تحل

(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب ٩ أشخاص فى تسعة مقاعد على شكل دائرة؟

مثال

(٦) إذا كان $^{٧}ل_{ر} = ٨٤٠$ فأوجد قيمة $\lfloor ر - ٤$

٨٤٠	٧
١٢٠	٦
٢٠	٥
٤	٤
١	

الحل

نبدأ بقسمة العدد ٨٤٠ على ٧ ثم بقسمه ناتج القسمة على ٦ ثم نقسم ناتج القسمة على ٥ وهكذا حتى نصل إلى العدد ١

∴ العدد $٨٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٧}ل_{٤}$

∴ $^{٧}ل_{ر} = {}^{٧}ل_{٤}$ ∴ ر = ٤ ∴ $\lfloor ر - ٤ = \lfloor ٠ = ١$

حاول أن تحل

(٦) إذا كان $^{٩}ل_{ر-١} = ٥٠٤$ فأوجد قيمة $\lfloor ر + ١$

تفكير ناقد: ١) أوجد قيمة كلاً من: $^{٧}ل_{٧}$ ، $\frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٧}$ ماذا تلاحظ؟

تمـارين (٢ - ٢)

اختر الأجابة الصحيحة من بين الإجابات:

١) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة

أ) ٢ ب) ٢٣ جـ) ٦٦ د) ١٣٢

٢) إذا كان $^{٥}ل_{ر}$ = ٦٠ فإن ر تساوى

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٢ د) ٥

٣) إذا كانت $^{ب}ل_{٣}$ = ١٢٠ فإن قيمة ب:

أ) ٦ ب) ٥ جـ) ٤ د) ٣

٤) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى

أ) ٤ ب) ٩ جـ) ١٠ د) ٢٤

٥) عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣، ٤، ٥، ٦} تساوى

أ) ٤٨ ب) ٣٠ جـ) ١٢ د) ٤

٦) عدد طرق ترتيب ٧ أطفال فى دائرة يساوى

أ) ١ ب) ٧ جـ) ٧٢٠ د) ٥٠٤٠

٧) رقم تليفون يتكون من ٨ منازل

.....					جـ	٩	

جـ يجب أن تكون أحد الأرقام ٣، ٤، ٥، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد، كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة؟

أ) ٤٩٩٩٩٩ ب) ٤٠٠٠٠٠٠ جـ) ٤٩٩٩٩٩٩ د) ١٠٠٠٠٠٠٠

٨) بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - سمك) ومشروبين (عصير - مياه غازية) (مثِّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية)

٩) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

١٠) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

١١) كم عددًا زوجيًّا مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣، ٤؟

١٢) بكم طريقةٍ يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و٤ سيدات؟



(١٣) يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاثة أحجام وخمس نكهات
(صغير ، متوسط ، كبير)
(فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاتة)
كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحدة من الآيس كريم؟

(١٤) من مجموعة الحروف {أ ، ب، جـ ، د، هـ ، و} أوجد
أ عدد طرق اختيار حرف واحد
ب عدد طرق اختيار حرفين مختلفين

(١٥) أوجد قيمة كلٍّ من:
أ $\frac{|٧}{|٥}$ ÷ $\frac{|٥}{|٢}$
ب $\frac{|٣}{|٢}$ - $\frac{|٢}{|٣}$
ج $ل_{٣}^{٥} \times |٢$
د $ل_{٢}^{٢} \times ل_{٣}^{٣}$
هـ $ل_{٢}^{٨} + ل_{١}^{٨}$
و $ل_{٧}^{٧} + ل_{٠}^{٧}$

(١٦) أوجد قيمة ن التى تحقق كل من:
أ $\frac{|ن}{|٢}$ = ٢٤
ب $\frac{|ن + ١}{|ن - ١}$ = ٤٢
ج $ل_{٣}^{١٥} = ٢٧٣٠$
د $ل_{٠}^{ن} + ل_{١}^{ن} + ل_{٢}^{ن} = ٥٠$

(١٧) أوجد قيمة ن إذا كان:
أ $ل_{ن}^{٧} = ٢١٠$
ب $\frac{|٢ن}{|ن - ١}$ = ١٢

(١٨) إذا كان $ل_{٤}^{ن} = ١٤ \times ل_{٣}^{ن-٢}$ فأوجد قيمة ن.

(١٩) أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص.

(٢٠) من بين ثمانية طلاب، بكم طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية اختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الآخر) للاشتراك فى فرق كرة القدم، وكرة السلة وكرة الطائرة على الترتيب.

(٢١) أثبت أن: $\frac{|ن + ٢}{|ن}$ = $ل_{٢}^{ن+٢}$

نشاط

١- إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}
أ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
ب كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
ج كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
د كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
هـ كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

٢ - ٣ التوافيق

Combinations

سوف تتعلم

- مفهوم التوافيق وتطبيقات بسيطة عليها.
- مثلث باسكال.

المصطلحات الأساسية

توافيق	*Combinations*
عناصر	*Elements*
ترتيب	*Order*
لجنة	*Committee*
مجموعة جزئية	*Subset*

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية – حاسب آلى

أضف إلى معلوماتك

يمكن أن تكتب التوافيق على الصورة $ن ق_ر = \left(\frac{ن}{ر}\right)$

تمهيد



يراد اختيار ناديين من بين مجموعة مكونة من أربعة أندية { أ ، ب جـ ، د} فى إحدى مباريات كرة القدم ، فإن كل التبديلات الممكنة هى:

(أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (أ ، ى) ، (ب ، أ) ، (ب ، جـ)، (ب ، ى)، (جـ، أ) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، ى) ، (ى ، أ) ، (ى ، ب) ، (ى ، جـ).

نلاحظ من البيان السابق أن الاختيار (أ ، ب) يختلف عن الاختيار (ب، أ) وهكذا...

فإذا أردنا الاختيار مما سبق دون مراعاة للترتيب فإن جميع الاختيارات الممكنة هى:

{ أ ، ب} ، { أ ، جـ} ، { أ ، ى} ، {ب ، جـ} ، {ب ، ى} ، { جـ ، ى}.

ويسمى كل اختيار من هذه الاختيارات " توفيقه"

التوافيق *Combinations*

تعريف

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر فى نفس الوقت هو $ن ق_ر$ حيث ، $ر \leq ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^+$

فى التمهيد السابق نجد أن:

يرمز لعدد توافيق ٤ عناصر مأخوذة منها ٢ فى كل مرة بالرمز $٤ ق_٢$ وتقرأ (٤ قاف ٢)

أو بالرمز $\binom{٤}{٢}$ وتقرأ (٤ فوق ٢)

ونلاحظ فى هذا التمهيد أن عدد طرق الأختيار = ٦ طرق

أى أن: $٤ ق_٢ = \frac{٤ ل_٢}{٢ !} = \frac{٣ \times ٤}{١ \times ٢} = ٦$ أى

$$ن ق_ر = \frac{ن ل_ر}{ر !}$$

مثال

(١) أوجد ناتج كل من

أ $٧ ق_٥$ ب $٧ ق_٢$ (ماذا تلاحظ)

الحل

أ $٧ ق_٥ = \frac{٧ ل_٥}{٥ !} = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ٢١$

ب $٧ ق_٢ = \frac{٦ \times ٧}{١ \times ٢} = ٢١$

نلاحظ أن: $^{٧}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$ (لاحظ أن: ٥ + ٢ = ٧)

نتائج هامة: $^{ن}ق_{ر} = \frac{|ن}{|ر \, |ن - ر}$ $\qquad$ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة $^{١٢}ق_{٩}$: $^{١٧}ق_{١٤}$ بدون استخدام الحاسبة.

نشاط استخدم الحاسبة

يمكن استخدام المفاتيح SHIFT ÷ من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافيق $({}^{n}C_{r})$

(١) باستخدام الحاسبة أوجد قيمة $^{٥}ق_{٤} + {}^{٧}ق_{٢}$

الحل

بالضغط على المفاتيح بالتتابع ابدأ ← 5 SHIFT ÷ 4 + 7 SHIFT ÷ 2 =

الناتج = ٢٦

مثال

(٢) إذا كان: $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر - ٤٧}$

الحل

∵ $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر - ٤٧}$

اما: ر = ٢ ر - ٤٧ أى أن: ر = ٤٧

وهى اكبر من قيمة ن ، لذلك هى ترفض

أو: ر + ٢ ر - ٤٧ = ٢٨ $\qquad$ ∴ ٣ ر = ٧٥ $\qquad$ ∴ ر = ٢٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر - ٥}$ فأوجد قيمة ر.

مثال

(٣) بكم طريقة يمكن اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص.

الحل

حيث أن الاختيار لايعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توفيقا.

عدد الاختيارات = $^{٩}ق_{٤} = \frac{^{٩}ل_{٤}}{|٤} = ١٢٦$

حاول أن تحل

(٣) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين . أوجد عدد مباريات المسابقة.

مثال

مبدأ عد

(٤) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و٥ سيدات؟

الحل

عدد طرق اختيار رجلين من ٧ رجال = $^{٧}ق_{٢}$ = ٢١

عدد طرق اختيار سيدة من ٥ سيدات = $^{٥}ق_{١}$ = ٥

وطبقا لمبدأ العد فإن عدد طرق تكوين اللجنة = ٢١×٥ = ١٠٥ طريقة

تفكير ناقد: بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦رجال و٥ سيدات؟

حاول أن تحل

(٤) فصل دراسى به ١٠ طلاب، ٨ طالبات . بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

نشاط

مثلث باسكال



بليز باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢):

هو فيلسوف فرنسى ورياضى وفيزيائى قدم نظرية الاحتمالات، وصمم تنظيمًا ثلاثيًا من الأرقام سمى مثلث بسكال فى حساب الاحتمالات واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدى عمليات الجمع والضرب.

تأمل مثلث الأعداد المقابل ثم أجب عن الأسئلة التالية:

١- ماذا تلاحظ عن كيفية كتابة الأعداد فى هذا المثلث؟

٢- هل توجد علاقة بين عدد عناصر كل صف والصف الذى يليه مباشرة؟

٣- هل يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبي ضلعى المثلث؟

				١											
			١		١										
		١		٢		١									
	١		٣		٣		١								
١		٤		٦		٤		١							
	١		٥		١٠		١٠		٥		١				
١		٦		١٥		٢٠		١٥		٦		١			
	١		٧		٢١		٣٥		٣٥		٢١		٧		١

بعد أجراء النشاط يمكن ملاحظة مايلى:

- **الصف الأول:** يمثل (ن =١) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١

 وبالتالى فإن: $^{١}ق_{٠}$ =١ ، $^{١}ق_{١}$ = ١

- **الصف الثانى:** يمثل (ن =٢) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١ أو ر = ٢ فى كل مرة.

 فيكون: $^{١}ق_{٠}$ = ١، $^{٢}ق_{١}$ = ٢ ، $^{٢}ق_{٢}$ =١ وهكذا

كما نلاحظ أن:

- كل صف يبدأ بالواحد لأن ${}^{ن}ق_{٠} = ١$ ، وينتهى بالواحد لأن ${}^{ن}ق_{ن} = ١$
- كل عدد فى أى صف باستثناء الصف الأول يساوى مجموع العددين الموجودين أعلاه فى الصف الذى يعلوه مباشرة.
- **ففى الصف الثالث نجد:** ١ ، ١ + ٢ ، ٢ + ١ ، ١
- **وفى الصف الرابع نجد:** ١ ، ١ + ٣ ، ٣ + ٣ ، ٣ + ١ ، ١ وهكذا.
- يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت ن زوجية)
- وتماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت ن فردية)
- وهذا مايطابق العلاقة السابقة ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

تطبيق على النشاط:

أثبت أن: ${}^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥} = ٢^{٥}$

تمـــاريـن (٢ – ٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات

(١) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوى.....

أ) ١٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) ٣٥

(٢) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة يساوى.....

أ) ٣٠ ب) ١٥ ج) ٢٤ د) ١٠

(٣) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء يساوى.....

أ) ١٥ ب) ٨ ج) ٦٠ د) ٢

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٤) احسب قيمة ${}^{٦}ق_{٣}$ ، ${}^{٩}ق_{١}$ ، ${}^{١٢}ق_{١١}$ ، ${}^{١٠٠}ق_{٠}$.

(٥) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة ${}^{ن}ق_{ن-٩}$

(٦) إذا كان ${}^{ن+١}ق_{٤} = \frac{٥}{٢}\ {}^{ن}ق_{٣}$ فأوجد قيمة ن.

(٧) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٣}\ ٣٠ن$ فأوجد قيمة ن.

(٨) بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية؟

(٩) يوجد في أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

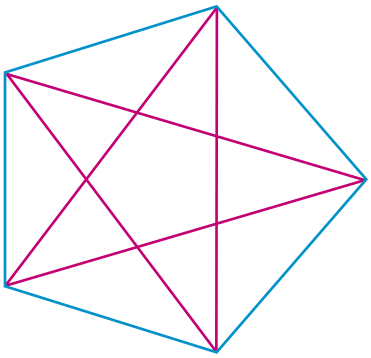
(١٠) اكتب بدلالة التباديل كل من:

أ $ق_{٣}^{٨}$ ب $ق_{٢}^{١٩}$ ج $ق_{.}^{٥}$ د $ق_{س-ص}^{س}$

(١١) اكتب مستخدمًا الصورة $ق_{ر}^{ن}$ كل ممايأتى:

أ $\frac{ل_{٢}^{٨}}{\lfloor ٢}$ ب $\frac{ل_{٣}^{٩}}{\lfloor ٣}$ ج $\frac{ل_{٤}^{١٠}}{\lfloor ٤}$ د $\frac{ل_{.}^{٨}}{\lfloor ٠}$

نشاط



سبق أن درست أن قطر الشكل الهندسى هو القطعة المستقيمة التى تصل بين رأسين غير متتاليتين وعلمت أن:

عدد أقطار المثلث = صفر

عدد أقطار الشكل الرباعى = ٢

عدد أقطار الشكل الخماسى = ٥

فهل يمكنك إيجاد عدد أقطار الأشكال الآتية:

(١) الشكل السداسى ، الشكل الثمانى ، شكل هندسى ذو عشرة أضلاع.

(٢) هل يمكنك استخدام التوافيق لكتابة قاعدة توجد من خلالها عدد أقطار أى شكل هندسى ؟ ابحث ذلك مع معلمك ومن خلال الشبكة الدولية للمعلومات.

ملخص الوحدة

مبدأ العد الأساسى: إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى ن طريقة ، وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوى م طريقة فإن عدد طرق اجراء العمل الأول والعمل الثانى معًا = م × ن طريقة.

التباديل: إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ب فإن كل ترتيب لبعض أو كل عناصر هذه المجموعة يسمى تبديلًا.

لتكن سـ مجموعة عدد عناصرها ن، فإن كل ترتيب عدد عناصره ر يمكن تكوينه من المجموعة سـ يسمى تبديلاً ، حيث ٠ ≤ ر ≤ ب ، ويرمز لعدد التبديلات الجزئية المكونة من ر عنصر المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها ب بالرمز $ل_{ر}^{ب}$ (وتقرأ ب لام ر)

$ل_{ر}^{ب}$ = ب(ب - ١) (ب - ٢)... (ب - ر + ١) حيث ٠ ≤ ر ≤ ب

نظرية: عدد التبديلات الممكنة من مجموعة عدد عناصرها ب يساوى ب (ب - ١) (ب - ٢)... × ٣ × ٢ × ١ ويرمز لحاصل الضرب السابق بالرمز $ب\lfloor$ (ويقرأ مضروب ب)

التوافيق: إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها ب ، فإن كل اختيار عدد عناصره ر حيث (٠ ≤ ر ≤ ب) يمكن أخذه من عناصر المجموعة سـ دون مراعاة للترتيب يسمى توفيقًا.

- ويرمز لعدد التوفيقات المكونة من ر عنصر المأخوذة من ب عنصر بالرمز $ق_{ر}^{ب}$ (ويقرأ ن قاف ر)

تمـــاريـن عامة

أكمل مايأتى:

(١) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام ١، ٢، ٣، ٤ يساوى.....

(٢) إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٣ أرقام ليس بينها الصفر، فإن عدد الطرق يساوى.....

(٣) إذا كان $^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ٢^{\nu}$ فإن ν =.....

(٤) إذا كان $\frac{\nu!}{(\nu-١)!} = ١$ فإن ν =.....

اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات { أ، ب، جـ} وأراد أن يختار لونها من بين الألوان:{ أبيض، أحمر ، فضى ، أسود} بكم طريقة يمكن أختيار السيارة .

أ ٧ ب ١٢ ج ١٤ د ٢٤

(٦) كم عدد يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١، ٣، ٦، ٧

أ ٩ ب ١٢ ج ٢٤ د ٦٤

(٧) إذا كانت سـ = {س:س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥} وكانت صـ = {(أ، ب): أ، ب ∈ سـ ، أ ≠ ب} كم عدد عناصر صـ

أ ٧ ب ١٠ ج ٢٠ د ٢٥

(٨) $^{١٢}ق_{٤} + {}^{١٢}ق_{٣}$ يساوى

أ ٧١٥ ب ٧١٠ ج ٧١٦ د ٧٢٠

(٩) إذا كان $^{\nu}ل_{ر} = ٣٣٦$ ، $^{\nu}ق_{ر} = ٥٦$ فإن ν ، ر هما

أ (٣، ٢) ب (٨، ٣) ج (٧، ٤) د (٧، ٣)

(١٠) شخص له ٨ أصدقاء ، عدد طرق دعوة صديق أو أكثر منهم للعشاء

أ ٢٥٠ ب ٢٠٠ ج ٢٥٥ د ٢٥٦

(١١) إذا كان $^{\nu}ق_{١٠} = {}^{\nu}ق_{١٤}$ فإن $^{٢٥}ق_{ن}$ يساوى

أ ٢٤ ب ٢٥ ج ١ د ٤٩

(١٢) احسب قيمة كل من:

أ $^{٥}ق_{٥}$ ب $\lfloor ٦$ ج $^{٢٣}ل_{١}$

د $^{٥٠}ق_{٤٩}$ هـ $\frac{\lfloor ١٣}{\lfloor ١٤}$ و $^{٤}ل_{٤}$

(١٣) إذا كان ^{٢} ب$^{-١}$ق$_{٣}$ = ٨٤ فما قيمة $\frac{|ب - ٥}{}$

(١٤) إذا كان ^{٨} ل$_{ر+١}$ = ٣٣٦ فما قيمة ^{٢}ق$_{٤}$

(١٥) إذا كان $^{ب-٣}$ل$_{٣}$ = ٢١٠ ، $^{ب+٣}$ق$_{٤}$ = ٧١٥ فأوجد قيمة كل من م ، ب

(١٦) بكم طريقة يمكن اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية.

(١٧) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد(ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب

(١٨) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجل وسيدتين من بين ٧ رجال و٥ سيدات؟

(١٩) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار . أوجد عدد طرق الأختيار؟

(٢٠) يبلغ عدد فرق الدورى الممتاز لكرة القدم ١٢ فريقًا، فإذا كان كل فريق يلعب مباراتين مع كل فريق من باقى الفرق. أوجد عدد مباريات الدورى بأكمله.

(٢١) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

أ $\frac{|ب+٣}{|ب+١} = ٤٢$ ب $\frac{|ب}{|ب+٢} \times ١٢ = |ب$ ج $|ب - ٤ = ١٢٠$

د $|ب - ٥ = ١$ هـ ^{ب}ق$_{٣}$ = ٨٤ و ^{١٢}ق$_{ر}$ = ^{١٢}ق$_{٢ر+٣}$

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

(١) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣، ٤، ٥ هو.....

أ ٦ ب ٣ ج ١ د صفر

(٢) عدد طرق تكوين العدد ٥٤٧٦ من الأعداد ٤، ٥، ٦، ٧ هو

أ ٢٤ ب ١٦ ج ١ د صفر

(٣) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٥ أرقام غير الصفر هو

أ ٥ × ٤ × ٣ ب ٥ + ٤ + ٣ ج ٥ × ٥ × ٥ د ٣ × ٢ × ١

(٤) إذا استخدمت حروف كلمة سلم فى كتابة كلمة من ثلاثة حروف مختلفة فإن عدد الكلمات الناتجة يساوى

أ ٣ ب ٦ ج ٩ د ١

(٥) ^{٩}ل$_{٦}$ تساوى

أ ٩ × ٨ × ٧ ب ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ ج $\frac{|٩}{}$ د $\frac{|٦}{}$

(٦) أوجد قيمة كل من:

أ $\overrightarrow{ق_{.}}^{٥} + \overrightarrow{ق_{١}}^{٥} + \overrightarrow{ق_{٢}}^{٥} + \overrightarrow{ق_{٣}}^{٥} + \overrightarrow{ق_{٤}}^{٥} + \overrightarrow{ق_{٥}}^{٥}$

ب $\overrightarrow{ق_{.}}^{٥} - \overrightarrow{ق_{١}}^{٥} + \overrightarrow{ق_{٢}}^{٥} - \overrightarrow{ق_{٣}}^{٥} + \overrightarrow{ق_{٤}}^{٥} - \overrightarrow{ق_{٥}}^{٥}$

(٧) أوجد: $\overrightarrow{ل_{٣}}^{٨} + \overrightarrow{ل_{٢}}^{٨} + \overrightarrow{ل_{١}}^{٨}$

(٨) ٥ نقط في مستوي لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد كم مثلث يمكن تكوينه منها

(٩) كم عددًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

(١٠) أوجد قيمة كلٍّ من:

أ $\frac{|٩٩}{|١٠٠}$

ب $|٠ + |١ + |٢ + |٣$

ج $\frac{|١٩}{|٢٠}$

د $|٥ - |٤$

هـ $\frac{|٤}{|٠}$

(١١) إذا كانت سـ = {- ٢ ، - ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

وكانت ع = {أ ، ب}: أ ≠ ب ، أ ، ب ∈ سـ } أوجدعدد عناصر ع

(١٢) أوجد قيمة ن فى الحالات الآتية:

أ $|ن = ٧٢٠$

ب ن $|٢ن - ١ = ٦٠$

ج $\overrightarrow{ق_{ن-٢}}^{ن} = ٢٨$

د $\overrightarrow{ل_{٤}}^{ن+٢} = ٥٦ \times \overrightarrow{ل_{٢}}^{ن}$

هـ $\frac{١}{|ن} = \frac{٢}{|ن+١}$

و $\overrightarrow{ل_{ن}}^{٢} = ٢٤ \overrightarrow{ق_{ن}}^{٢}$

إن لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
أرجع إلى	مبدأ عد	مبدأ عد	مبدأ عد	مبدأ عد	تباديل	توافق	تبادل	توافيق	مبدأ عد	مضروب العدد	توافيق	تباديل توافيق



الوحدة الثالثة

التفاضل والتكامل
Calculus

مقدمة الوحدة

ابتكر اسحاق نيوتن (١٦٤٢م – ١٧٢٧م) حساب التفاضل والتكامل ، ونافسه فى ذلك ليبنتز (١٦٤٦م – ١٧١٦م) مستقلاً عنه – حيث نشأ علم التفاضل (Differentiation) أو الاشتقاق مرتبطا بمشكلة إيجاد مماسات لمنحنيات وحساب قيم عظمى وصغرى لدوال رياضية بحتة أو دوال تنمذج مشكلات مجتمعية واقتصادية . أما التكامل (Integration) فقد رأى نيوتن أنه عملية عكسية للتفاضل بينما رآه ليبنتز كنهاية مجاميع، وينسب له استخدام حرف S للتعبير عن التكامل (من Summation) ثم تحول إلى الرمز المعروف جاليًا $\int$ والقريب من S ، وقد تقدم علم التفاضل والتكامل على أيدى كثيرين منهم بيركلى ، لاجرانج، لابلاس ، جاوس ، وايرشتراس – كما ساعد ابتكار الهندسة التحليلية فى تطور هذا العلم.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة. وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط التغير، ومعدل التغير.
- يستنتج المشتقة الأولى للدالة.
- يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).
- يبحث قابلية الدالة للاشتقاق (المشتقة اليمنى – المشتقة اليسرى).
- يستنتج العلاقة بين الاشتقاق و الاتصال .
- يحدد بعض قواعد الاشتقاق (التفاضل).
 - مشتقة الدالة الثابتة.
 - مشتقة الدالة د: د(س) = $س^{ن}$
 - مشتقة الدالة د : د(س) = س
 - مستقة الدالة د: د(س) = $أ س^{ن}$
 - مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما.
 - مشتقة جاصل ضرب دالتين.
 - مشتقة خارج قسمة دالتين.
 - مشتقة دالة الدالة – قاعدة السلسلة.
 - مشتقة الدالة ص = $(د(س))^{ن}$
 - مشتقة الدوال المثلثية.
- يستخدم المشتقات في تطبيقات هندسية مثل إيجاد معادلة المماس والعمودي لمنحنى عند نقطة عليه.
- يتعرف مفهوم التكامل – المشتقة العكسية.
- يتعرف ويستنتج قواعد التكامل الآتية:
 - $\int س^{ن} و س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ – ١
 - $\int أ د(س) و س = أ \int د(س) و س$. حيث أ ثابت
 - $\int [د(س) \pm ر(س)] و س = \int د(س) و س \pm \int ر(س) و س$
 - $\int (أ س + ب)^{ن} و س = \frac{١}{أ(ن+١)} (أ س + ب)^{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ – ١
 - $\int جا أ س و س = \frac{-١}{أ} جتا أ س + ث$ حيث أ ثابت
 - $\int جتا أ س و س = \frac{١}{أ} جا أ س + ث$ حيث أ ثابت
 - $\int قا^{٢} أ س و س = \frac{١}{أ} ظا أ س + ث$ حيث أ ثابت
 - $\int د'(س) [د(س)]^{ن} و س = \frac{١}{ن+١} [د(س)]^{ن+١} + ث$

المصطلحات الأساسية

التغير	*Variation*	دالة قابلة للاشتقاق	*Differintiable Functions*
متوسط التغير	*Average Rate of Change*	حاصل الضرب	*Product*
معدل التغير	*Rate of Change*	خارج القسمة	*Quotient*
المشتقة الأولى	*First Derivative*	قاعدة السلسلة	*Chain Rule*
المشتقة اليسرى	*Left Derivative*	الدوال المثلثية	*Trigonometric Functions*
المشتقة اليمنى	*Right Derivative*	تكامل	*Integration*
الاشتقاق	*Differentiation*	مشتقة عكسية	*Antiderivative*

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): معدل التغير.

الدرس (٣ - ٢): الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٣): قواعد الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٤): مشتقات الدوال المثلثية.

الدرس (٣ - ٥): تطبيقات على المشتقة.

الدرس (٣ - ٦): التكامل.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - جاسب آلى - برامج رسومية.

مخطط تنظيمى للوحدة



معدل التغير

٣ - ١

Rate of Change

سوف تتعلم

- مفهوم دالة التغير.
- مفهوم متوسط التغير.
- مفهوم معدل التغير.

المصطلحات الأساسية

- دالة التغير
 Function of Variation
- متوسط التغير
 Average Rate of Change
- معدل التغير
 Rate of Change

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

إذا سقطت كرة تنس طاولة وكرة قدم من نفس الارتفاع ، وفى نفس اللحظة، وبفرض إهمال تأثير مقاومة الهواء لهما، أى الكرتين تصطدم بالأرض أولاً ؟ فسر إجابتك.

يهتم علم التفاضل بدراسة التغير الذى يحدث فى متغير ما كنتيجة لتغير متغير آخر، فالتغير الحادث فى زمن حركة الكرة $(ن_٢ - ن_١)$ يؤدى إلى تغير مناظر فى سرعتها $(ع_٢ - ع_١)$ ، وبذلك يمكن مقارنة متوسط تغير السرعة بالنسبة لوحدة الزمن لكل من الكرتين بحساب المعدل $\frac{ع_٢ - ع_١}{ن_٢ - ن_١}$

تعلم

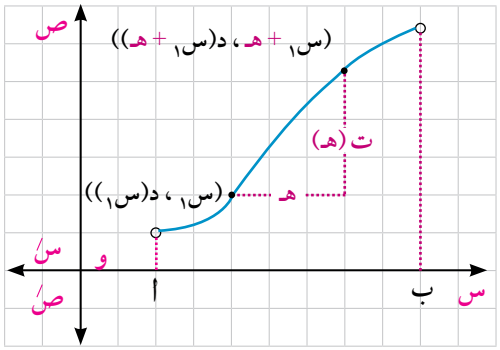
دالة التغير

Function of Variation

إذا كانت د:] أ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) فإن أى تغير فى قيمة س من $س_١$ إلى $س_٢$ في مجال د يقابله تغير فى قيمة ص من $د(س_١)$ إلى $د(س_٢)$ وعليه فإن :

مقدار التغير فى س = Δ س (ويقرأ دلتا س) = $س_٢ - س_١$ ،

مقدار التغير فى ص = Δص = $د(س_٢) - د(س_١)$



وباعتبار ($س_١$ ، $د(س_١)$) نقطة على منحنى الدالة د، فإن لكل تغير فى إحداثيها السينى من $س_١$ إلى $س_٢ = س_١ + هـ$ بحيث $س_١ + هـ \in$] أ ، ب[، $هـ \neq ٠$ يحدث تغير مناظر فى إحداثيها الصادى يتعين بالعلاقة :

$ت(هـ) = د(س_١ + هـ) - د(س_١)$

وتسمى الدالة ت بدالة التغير فى د عند $س = س_١$

ملاحظة:

كلا الرمزين Δس أو هـ يمثلان التغير فى س

مثال

(١) إذا كانت د(س) = ٣س^{٢} + س - ٢

وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + هـ فأوجد دالة التغير ت، ثم احسب مقدار التغير فى د عندما

أ هـ = ٠,٣ ب هـ = - ٠,١

الحل

∵ د (س) = ٣ س^{٢} + س - ٢ ، س تتغير من ٢ إلى ٢ + هـ

∴ س$_{١}$ = ٢ ، د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ - ٢ = ١٢ ، ويكون :

د (٢ + هـ) = ٣ (٢ + هـ)^{٢} + (٢ + هـ) - ٢ = ١٢ + ١٢هـ + ٣هـ^{٢} + ٢ + هـ - ٢

= ٣ هـ^{٢} + ١٣هـ + ١٢

ت (هـ) = د(٢ + هـ) - د(٢)

= (٣هـ^{٢} + ١٣ هـ + ١٢) - ١٢ = ٣هـ^{٢} + ١٣ هـ

أ عندما هـ = ٠,٣

ت(٠,٣) = ٣(٠,٣)^{٢} + ١٣ × ٠,٣

= ٤,١٧

ب عندما هـ = - ٠,١

ت(- ٠,١) = ٣ (- ٠,١)^{٢} + ١٣ (- ٠,١)

= - ١,٢٧

حاول أن تحل

(١) إذا كانت د(س) = س^{٢} - س + ١ فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣ ثم احسب:

أ ت(٠,٢) ب ت(- ٠,٣)

تعلم

دالة متوسط التغير *Function of Average Rate of Change*

بقسمة دالة التغير ت على هـ حيث هـ ≠ ٠ نحصل على دالة جديدة م، تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = س$_{١}$ حيث :

م (هـ) = $\frac{\text{ت(هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د(س}_{١}\text{ + هـ) - د(س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$ أو $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{د(س}_{٢}\text{) - د(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢}\text{ - س}_{١}}$

مثال

(٢) إذا كانت د:]-∞، ٠[⟵ ع حيث د(س) = س^{٢} + ١ فأوجد :

أ دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم إحسب م (٠,٣)

ب متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٣ إلى ٤

الحل

أ د(س$_{١}$) = د(٢) = (٢)^{٢} + ١ = ٥ ، د (س$_{١}$ + هـ) = د (٢ + هـ)

∴ د(٢+هـ) = (٢ + هـ)^{٢} + ١ = هـ^{٢} + ٤ هـ + ٥

∵ م (هـ) = $\frac{\text{د(س}_{١}\text{ + هـ) - د(س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$

∴ م (هـ) = $\frac{\text{هـ}^{٢}\text{ + ٤ هـ + ٥ - ٥}}{\text{هـ}}$ = هـ + ٤ ويكون م (٠,٣) = ٤,٣

ب عندما تتغير س من ٣ إلى ٤ فإن س$_{١}$ = ٣ ، س$_{٢}$ = ٤

ويكون د(٣) = ٩ + ١ = ١٠ ، د(٤) = ١٦ + ١ = ١٧

متوسط التغير = $\frac{\text{د(س}_{٢}\text{) - د(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢}\text{ - س}_{١}}$ = $\frac{١٧ - ١٠}{٤ - ٣}$ = ٧

حاول أن تحل

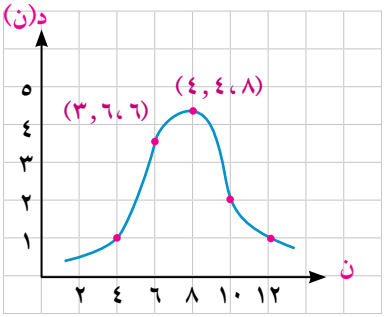
(٢) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٣س - ١ فأوجد :

أ دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم أوجد م (٠,٢)

ب متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

مثال

(٣) يوضح الشكل المقابل المنحنى ر = د(ن) حيث ر جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات.
ن الزمن مقدرًا بالشهور.
أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :



أ ن = ٤ إلى ن = ٨ ب ن = ٨ إلى ن = ١٠

الحل

أ من الرسم : د(٨) = ٤,٤ ، د(٤) = ١

متوسط التغير فى د = $\frac{\text{د(٨) - د(٤)}}{٨ - ٤}$ = $\frac{٤,٤ - ١}{٤}$ = ٠,٨٥ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار ٠,٨٥ مليون جنيه شهريا خلال هذه الفترة .

ب من الرسم : د(١٠) = ٢ ، د(٨) = ٤,٤

متوسط التغير فى د = $\frac{\text{د(١٠) - د(٨)}}{١٠ - ٨}$ = $\frac{٢ - ٤,٤}{٢}$ = - ١,٢ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٢ مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة.

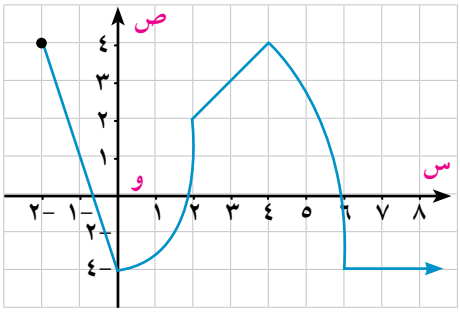
حاول أن تحل

(٣) مستخدمًا الشكل الموضح فى مثال (٣) أوجد متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

أ ن = ٤ إلى ن = ٦ ب ن = ٦ إلى ن = ١٠ ج ن = ٤ إلى ن = ١٢

تفكير ناقد :

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س). حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك



تعلم

دالة معدل التغير

Function of Rate of Change

إذا كانت د:] أ ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) ، س$_١$ ، س$_١$ + هـ ∈] أ ، ب[فإن :

دالة معدل التغير فى د عند س$_١$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

٤ أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = س$_١$ لكل ممايأتى، ثم أوجد هذا المعدل عند قيم س المعطاة

أ د(س) = ٣س^٢ + ٢ عندما س = ٢

ب د(س) = $\frac{٢}{س - ١}$ عندما س = ٣

الحل

أ ∵ د(س) = ٣س^٢ + ٢ ∴ عندما س = س$_١$ فإن د(س$_١$) = ٣س$_١^٢$ + ٢،

د(س$_١$ + هـ)^٢ = ٣ (س$_١$ + هـ)^٢ + ٢ = ٣س$_١^٢$ + ٦ س$_١$ هـ + ٣ هـ^٢ + ٢

دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٦ س_١ هـ + ٣ هـ^٢}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ (٦س$_١$ + ٣ هـ) = ٦س$_١$

عند س = ٢ ∴ س١ = ٢ ويكون معدل التغير في د = ٦ × ٢ = ١٢

ب ∵ د(س) = $\frac{٢}{س - ١}$ ∴ عندما س = س$_١$ فإن :

د(س$_١$ + هـ) - د(س$_١$) = $\frac{٢}{س_١ + هـ - ١}$ - $\frac{٢}{س_١ - ١}$

= $\frac{٢س_١ - ٢ - ٢س_١ - ٢هـ + ٢}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$ = $\frac{- ٢ هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$

دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{١}{هـ}$ × $\frac{- ٢ هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$ = $\frac{- ٢}{(س_١ - ١)^٢}$

عند س = ٣ ∴ س$_١$ = ٣ ويكون معدل التغير فى د = $\frac{- ٢}{(٣ - ١)^٢}$ = - $\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

٤ أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ عندما تتغير س من س$_١$ إلى س$_١$ + هـ ثم استنتج معدل التغير فى د عند س = ٥

مثال

(٥) أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ عند س = $س_١$ ثم أوجد معدل التغير فى د عندما:

أ س = ٦ ب س = - ٢

الحل

أ ∵ د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ ∴ مجال د = [- ٣ ، ∞ [

عند س = $س_١$ فإن : د($س_١$) = $\sqrt{س_١ + ٣}$ ، د($س_١ + هـ$) = $\sqrt{س_١ + هـ + ٣}$

ويكون:

دالة متوسط التغير فى د = م(هـ) = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$= \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} - \sqrt{س_١ + ٣}}{هـ}$

، دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to ٠}$ م(هـ) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} - \sqrt{س_١ + ٣}}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} - \sqrt{س_١ + ٣}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} + \sqrt{س_١ + ٣}}{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} + \sqrt{س_١ + ٣}}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س_١ + هـ + ٣ - س_١ - ٣}{هـ [\sqrt{س_١ + هـ + ٣} + \sqrt{س_١ + ٣}]}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س_١ + ٣}}$ حيث $س_١ > - ٣$

أ عند س = ٦ ∴ معدل التغير فى د = $\frac{١}{٢\sqrt{٦ + ٣}}$ = $\frac{١}{٦}$

ب عند س = - ٢ ∴ معدل التغير فى د = $\frac{١}{٢\sqrt{- ٢ + ٣}}$ = $\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

(٥) أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د(س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند س = $س_١$ ثم استنتج معدل التغير فى د عندما س = ٩

هل يمكن حساب معدل التغير فى د عندما س = ٥ ؟ فسر إجابتك

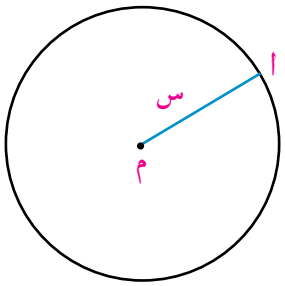
تطبيقات حياتية

مثال

(٦) سقط حجر فى ماء ساكن، فتكونت موجة دائرية تتسع بانتظام، بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى . أوجد معدل التغير فى مساحة سطحها بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ٣,٥سم

($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل



نمذجة المشكلة:

بفرض أن طول نصف قطر الموجه = س سم

∴ مساحة الصفيحة مـ = π س^{٢} سم^{٢}

ويكون مـ = د(س) = π س^{٢}

عندما س تتغير من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ

فإن دالة معدل التغير فى مـ = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\pi (س_{١} + هـ)^{٢} - \pi س_{١}^{٢}}{هـ}$

$= \pi \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_{١} + هـ)^{٢} - س_{١}^{٢}}{هـ} = \pi ٢ س_{١}$

عندما س = س$_{١}$ = ٣,٥ ∴ معدل التغير فى مـ = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥ = ٢٢

حاول أن تحل

(٦) صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣سم إلى ٣,٤سم، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥سم.

مثال

(٧) فى تفاعل كيميائى ناتجه النهائى المادة أ، وجد أن مقدار المادة الناتجة بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ص = ن^{٣} ملليجرم . أوجد المعدل اللحظى لإنتاج المادة أ عندما ن = ٢ ثانية .

الحل

بفرض أن ص = د(ن) = ن^{٣} فيكون :

المعدل اللحظى لإنتاج المادة أ هو نفسه معدل التغير فى د.

عند ن = ن$_{١}$ فإن دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(ن + هـ) - د(ن)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(ن + هـ)^{٣} - ن^{٣}}{هـ} = ٣ ن^{٢}$

عند ن = ن$_{١}$ = ٢ ثانية ∴ المعدل اللحظى لانتاج المادة أ = ٣(٢)^{٢} = ١٢ ملليجرام /ث

حاول أن تحل

(٧) يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أى لحظة زمنية ن(مقيسة بالدقائق)بالعلاقة د(ن) = ٢ن^{٣} + ١٠٠ ملليجرام

أوجد معدل النمو اللحظى للدالة د عندما ن = ٥

تمـــارين (٣ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى

أ) ٠,٣٢ ب) ٠,٤٨ ج) ٣,٦ د) ٧,٢

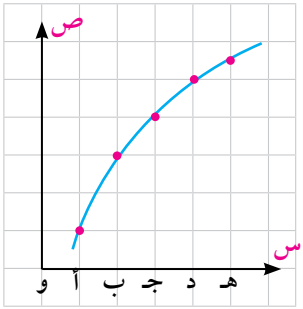
(٢) إذا كان متوسط التغير فى د = ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د(٢) = ٦ فإن د(٤) تساوى

أ) -٤ ب) ٧ ج) ٨ د) ١٦

(٣) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥سم إلى ٧سم يساوى

أ) ١٢٥ ب) ٣٤٣ ج) ٢١٨ د) ١٠٩

(٤) يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س) فى أى الفترات التالية يكون متوسط التغير فى د هو الأكبر



أ) [أ ، ب] ب) [ب ، جـ]

ج) [جـ ، د] د) [أ ، هـ]

أجب عن مايأتى:

(٥) إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ + ٢ س - ١ أوجد التغير فى د عندما

أ) تتغير س من ٢ إلى ٢,١ ب) س = - ٢ ، هـ = ١

(٦) أوجد دالة متوسط التغير فى د عندما س = $س_{١}$، ثم استنتج معدل تغير د عند قيم $س_{١}$ المبينة فيمايلى :

أ) د(س) = ٢$س^{٣}$، $س_{١}$ = ٢ ب) د(س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$ ، $س_{١}$ = ٠

(٧) أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د(س) = $\sqrt{٨ س - ٣}$ عندما س = $س_{١}$، ثم استنتج معدل التغير فى د عندما س = ٧

(٨) **الربط بالمساحات:** صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع، احسب معدل التغيير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨سم.

(٩) **الربط بالحجوم :** كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروي، فأوجد معدل التغيير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧سم.

(١٠) **اكتشف الخطأ :** صفيحة على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه، تتمدد بالتسخين بانتظام بحيث تظل محتفظه بشكلها وبنفس النسبة بين أبعادها، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة لعرضها عندما يكون العرض ١٠سم.

الحل الأول

نفرض العرض س، الطول ٢س

المساحة = الطول × العرض ∴ د(س) = ٢س^{٢}

معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ (٢س_١ + هـ)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} (٤س_١ + ٢هـ) = ٤س_١$

عندما $س_١$ = ١٠سم

معدل التغير = ٤٠

الحل الثاني

نفرض الطول س، العرض $\frac{١}{٢}$ س

المساحة = الطول × العرض ∴ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ (س_١ + \frac{١}{٢} هـ)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} (س_١ + \frac{١}{٢}هـ) = س_١$

عندما $س_١$ = ١٠سم

معدل التغير = ١٠

الربط بالزراعة:

(١١) إذا كانت الكمية ص (مقيسة بالكيلو جرام) التى تنتجها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج، يتوقف على عدد الكيلو جرامات س من المبيد الحشرى المستخدم لرش الشجرة طبقًا للعلاقة ص = ١٠٠ - $\frac{٤٢}{س + ١}$

احسب متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من ١ إلى ٢ .

الربط بالهندسة:

(١٢) فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروى. احسب متوسط التغير في مساحة سطحها الكروى عندما يتغير طول نصف قطرها من ٠,٥سم إلى ٠,٦سم، علمًا بأن مساحة سطح الكرة يساوي ٤ π نق^{٢} حيث نق طول نصف قطر الكرة .

(١٣) صفيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوي ضعف ارتفاعها المناظر، تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها. احسب متوسط التغير في مساحتها إذا تغير ارتفاعها من ٨ سم إلى ٨,٤ سم.

الاشتقاق

٣ - ٢

Differentiation

سوف تتعلم

- المشتقة الأولى للدالة
- المشتقة اليسرى للدالة.
- المشتقة اليمنى للدالة
- قابلية الاشتقاق عند نقطة.
- العلاقة بين الاشتقاق والاتصال

المصطلحات الأساسية

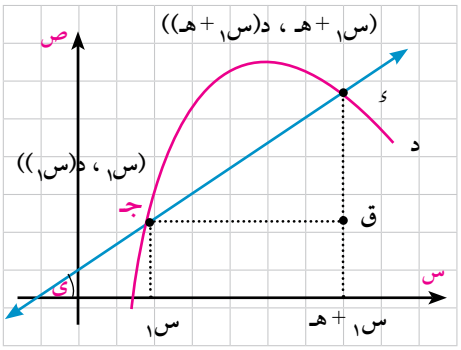
- المشتقة الأولى *First Derivative*
- المشتقة اليسرى *Left Derivative*
- المشتقة اليمنى *Right Derivative*
- الاشتقاق *Differentiation*
- دالة قابلة للاشتقاق *Differintiable Function*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش

١ يوضح شكل (١) منحنى د: [أ ، ب] ⟵ ع حيث ص = د(س) ، $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ قاطعا له فى النقطتين جـ (س١ ، د(س١)) ، ئ (س١ + هـ، د(س١ + هـ)).
أوجد ميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$.

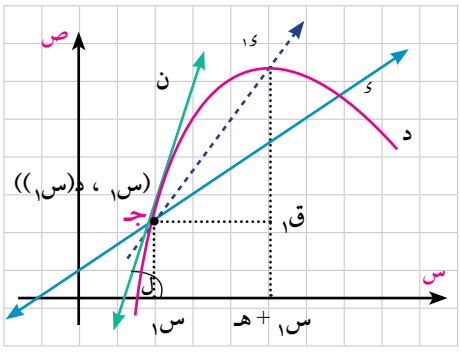


شكل (١)

٢ باعتبار س تتغير من س١ إلى س١ + هـ قارن بين دالة متوسط التغير فى د ، وميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$.
هل العلاقة التالية صحيحة ؟

ميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ = ظا ى = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = م (هـ)

٣ إذا كانت النقطة جـ (س١، د(س١)) نقطة ثابتة على منحنى الدالة د ، وتحركت النقطة ئ على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ ليأخذ $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ الوضع $\overleftrightarrow{جـ ن}$ ويصبح مماسًا للمنحنى عند جـ .



شكل (٢)

أى أن هـ ⟵ صفر
أوجد ميل المماس لمنحنى د عند جـ

لاحظ أن :

ميل المماس عند جـ = ظا ل = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ إن وجدت

أي أن :

ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند النقطة (س١، د(س١))
يساوى معدل التغير فى د عند س = س١

مثال

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٥ عند النقطة أ(٢، ٧)، ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د(٢) = ٣(٢)^{٢} - ٥ = ٧ ∴ النقطة أ (٢، ٧) تنتمى إلى منحنى د

ميل المماس عند (س = ٢) = معدل التغير فى د عند (س = ٢)

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$$

∴ ميل المماس $= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(٢ + هـ)^{٢} - ٥ - ٧}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{١٢ هـ + ٣ هـ^{٢}}{هـ}$

$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} (١٢ + ٣ هـ) = ١٢$

ويكون ظا ل = ١٢ ∴ ل = ظا$^{-١}$(١٢) ≃ ٨٥°١٤

حاول أن تحل

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ٤ عند النقطة أ (١، - ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة .

تعلم

الدالة المشتقة

The Derivative Function

لكل قيمة للمتغير س فى مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير فى د ، وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضًا فى المتغير س يطلق عليها " الدالة المشتقة" أو : المشتقة الأولى للدالة" أو " المعامل التفاضلى الأول"

تعريف

إذا كانت د :] أ ، ب [⟵ ع ، س ∈] أ ، ب [فإن **الدالة المشتقة د`** :

د`(س) $= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

رموز الدالة المشتقة :

إذا كانت ص = د(س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز

ص` أو د` وتقرأ " مشتقة ص" أو " مشتقة د"

$\frac{ى ص}{ى س}$ وتقرأ " دال ص دال س " أو " مشتقة ص بالنسبة إلى س"

لاحظ أن ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س$_{١}$، د(س$_{١}$)) هو د`(س$_{١}$)

مثال

(٢) أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث د(س) = س^{٢} - س + ١ مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧)

الحل

∵ د(س) = س^{٢} - س + ١

∴ د(س + هـ) = (س + هـ)^{٢} - (س + هـ) + ١ = س^{٢} + ٢س هـ + هـ^{٢} - س - هـ + ١ ،

د(س + هـ) - د(س) = (٢س + هـ - ١) هـ

∵ د′(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ ∴ د′(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٢س + هـ - ١) هـ}{هـ}$

د′(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ (٢س + هـ - ١) د′(س) = ٢س - ١

∵ د(- ٢) = (- ٢)^{٢} - (- ٢) + ١ = ٧ ∴ النقطة (- ٢، ٧) تقع على منحنى د

ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧) = د′(- ٢) = ٢(- ٢) - ١ = - ٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = ٣ س^{٢} + ٤س + ٧ فأوجد مشتقة الدالة د مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (- ١ ، ٦)

تعلم

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة

Differentiable at a Point

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ تنتمي إلى مجال الدالة) إذا وفقط إذا كانت د′(أ) لها وجود حيث

د′(أ) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

و إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمي إلى الفترة] جـ ، ء [نقول إن الدالة د قابلة للاشتقاق في هذه الفترة.

في مثال (٢) : نجد أن لكل س ∈ ع يوجد مشتقة للدالة د حيث د′(س) = ٢س - ١ ولذلك فإن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للاشتقاق على ع

مثال

(٣) أثبت ان د(س) = $\frac{س - ١}{س + ١}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

الحل

∵ مجال د = ع - {-١} ∴ د معرفة عند س = ٢ ، د (٢) = $\frac{١}{٣}$

د′(٢) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{\frac{٢ + هـ - ١}{٢ + هـ + ١} - \frac{١}{٣}}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٣ + ٣هـ - ٣ - هـ}{٣ هـ (٣ + هـ)}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٢ هـ}{٣هـ(٣ + هـ)}$ = $\frac{٢}{٩}$ ∈ ع ∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

حاول أن تحل

(٣) أثبت أن د(س) = س^{٢} - س + ١ قابلة للاشتقاق عند س = ١

المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى *Right and Left Derivative*

إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ (حيث أ تنتمى إلى مجال الدالة)، وكانت قاعدة الدالة على يمين أ تختلف عن قاعدتها على يسار أ فنبحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ ، بأن نوجد المشتقة اليمنى للدالة و يرمز لها د$'$(أ$^{+}$) والمشتقة اليسرى و يرمز لها د$'$(أ$^{-}$) حيث :

المشتقة اليمنى د$'$(أ$^{+}$) = $\lim_{هـ \to 0^{+}} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ ، المشتقة اليسرى د$'$(أ$^{-}$) = $\lim_{هـ \to 0^{-}} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

وتكون الدالة د قابلة للاشتقاق عند أ إذا وفقط إذا كان د$'$(أ$^{+}$) = د$'$(أ$^{-}$)، و يرمز لمشتقة الدالة بالرمز د$'$(أ)

مثال

(٤) بين أن الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س \geq ٢ \\ س + ٢ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$ غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

الحل

∵ مجال د = ع

∴ الدالة معرفة عند س = ٢ ، د(٢) = (٢)^{٢} = ٤

∴

د$'$(٢$^{-}$) = $\lim_{هـ \to 0^{-}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{(٢ + هـ)^{٢} - ٤}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{٤ هـ + هـ^{٢}}{هـ}$

∴ د$^{-}$(٢$^{-}$) = ٤

، د$'$(٢$^{+}$) = $\lim_{هـ \to 0^{+}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{(٢ + هـ + ٢) - ٤}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{هـ}{هـ}$ = ١

∴ د$^{-}$(٢$^{+}$) = ١

∵ د$'$(٢$^{+}$) ≠ د$'$(٢$^{-}$) ∴ د$'$(٢) ليس لها وجود ؟ أى أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

حاول أن تحل

(٤) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢ حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٥ & \text{عندما } س > ٢ \\ ٤س - ٩ & \text{عندما } س \leq ٢ \end{cases}$

تفكير ناقد :

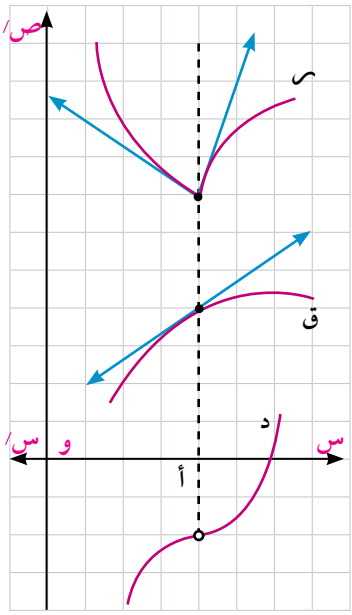
- ابحث اتصال كل من الدالتين فى بندى مثال (٤) ، وحاول أن تحل (٤) واستنتج العلاقة بين قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة فى مجالها واتصالها عند نفس النقطة .
- هل الدالة د حيث د(س) = |س - ٢| قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ؟

الاشتقاق والاتصال
Derivative and Continuity

نظرية

➢ إذا كانت الدالة د حيث ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

يوضح الشكل المقابل أن:



١ - اتصال دالة عند نقطة لايعنى بالضرورة أنها قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة كما فى الدالتين ر، ق

٢ - إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = أ كما فى الدالة د

ملاحظة هامة:

عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها ، يفضل بحث اتصالها عند هذه النقطة أولاً، فإذا كانت متصلة نبحث الاشتقاق و إذا كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للأشتقاق)

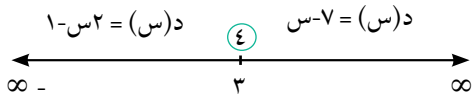
مثال

(٥) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٣ حيث د(س) = { ٢س - ١ عندما س > ٣ ؛ ٧ - س عندما س ⩽ ٣ }

الحل

بحث الاتصال عند س = ٣

(١) د(٣) = ٧ - ٣ = ٤



(٢) د(٣$^-$) = $\lim_{س \to ٣}$ (٢ س - ١) = ٥ ، د(٣$^+$) = $\lim_{س \to ٣}$ (٧ - س) = ٤

∵ د(٣$^-$) ≠ د(٣$^+$) ∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) غير موجودة ، د غير متصلة عند س = ٣

∵ د غير متصلة عند س = ٣ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

حاول أن تحل

(٥) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث د(س) = { س^٢ + ٢ عندما س ⩽ ١ ؛ ٢س + ١ عندما س > ١ } عند س = ١

(٦) إذا كانت د(س) = { س^٢ + أ عندما س ⩾ ٢ ؛ أ س + ب عندما س < ٢ } قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن أ + ب يساوى:

أ ٤ ب -٤ ج -٨ د ٨

تمـــاريـن (٣ – ٢)

أجب عن مايأتى:

(١) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} - ٥ عند س = ٣ وبين المعنى الهندسى لمشتقة الدالة عند س = ٣

(٢) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = ١ - ٥س - ٣س^{٢} عند النقطة (- ١، ٣)، ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لأقرب دقيقة.

(٣) أوجد مستخدمًا التعريف الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $\sqrt{٣س + ١}$

ب) د(س) = $\frac{١}{س}$

(٤) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٤ - س^{٢} & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٢س + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٥) أوجد قيمة الثابت أ إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ٢ حيث

د(س) = $\begin{cases} ٢س + ٣ & \text{عندما } س < ٢ \\ أ س^{٢} + ٨ س - ١ & \text{عندما } س \leq ٢ \end{cases}$

(٦) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ١ & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٤ س - ٣ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة الثابت أ ثم ابحث قابليتها اشتقاق الدالة عند س = ٢

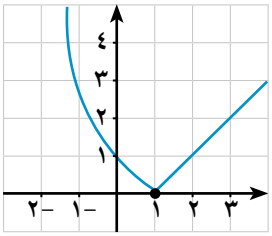
(٧) إذا كان د(س) = أ س^{٢} + ب حيث أ و ب ثابتان أوجد :

أ) المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س، ص).

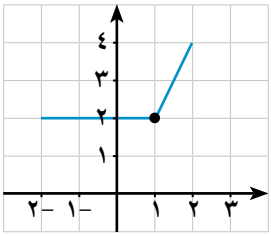
ب) قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢، -٣) الواقعة عليه يساوى ١٢.

(٨) قارن بين المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لكل من الدوال الآتية، وأثبت أن كلًّا منها غير قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ١.

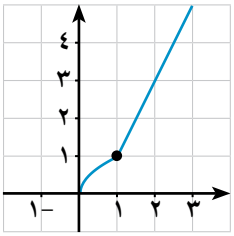
أ)



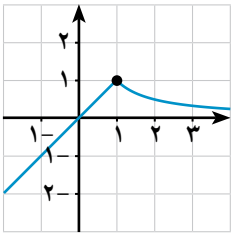
ب)



ج)



د)



٣ - ٣ قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

سوف تتعلم

- مشتقة الدالة الثابتة.
- مشتقة د(س) = س^{ن}
- مشتقة د(س) = س
- مشتقة د(س) = أس^{ن}
- مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما.
- مشتقة حاصل ضرب دالتين.
- مشتقة خارج قسمة دالتين.
- مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة).
- مشتقة ص = (د(س))^{ن}.

المصطلحات الأساسية

المشتقة الأولى	*First Derivative*
حاصل ضرب	*Product*
خارج قسمة	*Quotient*
قاعدة السلسلة	*Chain Rule*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب.

استكشف

١ - أوجد باستخدام تعريف المشتقةالأولى للدالة مشتقة كلاً من :

د(س) = س^{٣} د(س) = س^{٥}

٢ - هل يمكنك اكتشاف مشتقة د(س) = س^{٧} دون استخدام التعريف؟

٣ - هل يمكنك استنتاج قاعدة لمشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{ن} ؟

تعلم

مشتقة الدالة

Derivative of a Function

١ - مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث: جـ ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = ٠$

لاحظ أن :

ص = د(س) = جـ ، د(س + هـ) = جـ

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = د′(س) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = د′(س) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ}$ = صفرًا (هـ ≠ ٠)

٢ - مشتقة الدالة د(س) = س^{ن}

إذا كانت ص = س^{ن} حيث: ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = ن س^{ن - ١}$

إذا كانت ص = س فإن: $\frac{د ص}{د س} = ١$

إذا كانت ص = أ س^{ن} حيث: أ ، ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = أ ن س^{ن - ١}$

مثال

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل ممايأتى:

أ ص = - ٣ ب ص = س^{٤} جـ ص = ٥س

د ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ هـ ص = $\sqrt[٧]{س^{٣}}$

الحل

أ ∵ ص = - ٣ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٠

ب ∵ ص = س^{٤} ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٤ س^{٣}

جـ ∵ ص = ٥ س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥

د ∵ ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ = ٣ س$^{-٢}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = - ٦ س$^{-٣}$

هـ ∵ ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢}\sqrt{س}$ حيث س ⩾ ٠

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مماياتى:

أ ص = - $\sqrt{٢}$ ب ص = $\frac{٤}{٣}\pi$ س^{٣} جـ ص = $\frac{-٤}{س^{٥}}$ د ص = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$

مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت ع، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ، فإن ع± ق تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ويكون $\frac{د}{د س}$ (ع ± ق) = $\frac{د ع}{د س}$ ± $\frac{د ق}{د س}$ وبصفة عامة ، فإن :

إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ،.....، د$_{ن}$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن:

$\frac{د}{د س}$ (د$_{١}$ ± د$_{٢}$ ± د$_{٣}$ ± ... ± د$_{ن}$)(س) = د$_{١}$'(س) ± د$_{٢}$'(س) ± د$_{٣}$'(س) ±...± د$_{ن}$'(س)

مثال

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مماياتى:

أ ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$ ب ص = $\frac{\sqrt{س} - ٢ س}{\sqrt{س}}$

الحل

أ ∵ ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ١٢ س^{٥} - ٩ س$^{-١٠}$

ب ∵ ص = $\frac{\sqrt{س} - ٢ س}{\sqrt{س}}$

= $\frac{١ - ٢\sqrt{س}}{س}$ = ١ - ٢ س$^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٠ - ٢ × $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}-١}$ = - س$^{-\frac{٣}{٢}}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ ص = ٣ س^{٨} - ٢ س^{٥} + ٦س + ١ ب ص = $\frac{٥}{س}$ + س$\sqrt{س}$ + $\sqrt[٣]{٨}$ س - ٤

مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت ع ، و دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س، فإن الدالة (ع . و) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون: $\frac{د}{د س}$ (ع . و) = ع $\frac{د و}{د س}$ + و $\frac{د ع}{د س}$

مثال

(٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = - ١

الحل

∵ ص = (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = (س^{٢} + ١) × ٣س^{٢} + (س^{٣} + ٣) × ٢ س

= ٣س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س^{٤} + ٦س

= ٥س^{٤} + ٣س^{٢} + ٦س

عند س = - ١ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ (- ١)^{٤} + ٣(- ١)^{٢} + ٦ (- ١) = ٢

حاول أن تحل

(٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = (٤س^{٢} - ١) (٧ س^{٣} + س) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

مشتقة خارج قسمة دالتين:

إذا كانت ع ، و دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت و (س) ≠ ٠

فإن الدالة($\frac{ع}{و}$) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون $\frac{د}{د س}$ ($\frac{ع}{و}$) = $\frac{و \frac{د ع}{د س} - ع \frac{د و}{د س}}{ق^{٢}}$

أى ($\frac{ع}{و}$)$'$ = $\frac{و ع' - ع و'}{و^{٢}}$

مثال

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$

الحل

∵ ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(س^{٣} + ١) \times ٢س - (س^{٢} - ١) \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢ س^{٤} + ٢س - ٣ س^{٤} + ٣ س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

= $\frac{- س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = $\frac{س^{٣} + ٢ س^{٢} - ١}{س + ٥}$

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) (Chain rule)

عمل تعاونى

اعمل مع زميل

إذا كانت ص = (٣س^{٢} - ١)^{٤} أوجد $\frac{د ص}{د س}$

هل تحتاج إلى عمليات حسابية مطولة؟ ، هل وجدت صعوبة فى إيجاد الدالة المشتقة؟

سبق لك دراسة تركيب الدوال وعلمت أن :

(د ∘ ر) (س) = د[ر (س)]

فإذا كان د، ر دالتين حيث ص = د(ع)، ع = د(س) فإن ص = د[ر (س)]

ونقول أن ص دالة الدالة س

نظرية

إذا كانت ص = د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، كانت ع = ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ص = د(ر(س)) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

ويكون: $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

تعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة

مثال

٥ إذا كانت ص = (س^{٢} - ٣س + ١)^{٥} **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$

الحل

بفرض ع = س^{٢} - ٣ س + ١ ∴ ص = ع^{٥}

واضح أن ص قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع (كثيرة حدود فى ع) ويكون $\frac{د ص}{د ع}$ = ٥ ع^{٤}

وكذلك ع قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س (كثيرة حدود فى س) ويكون $\frac{د ع}{د س}$ = ٢ س - ٣ ،

بتطبيق قاعدة السلسلة ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ = ٥ ع^{٢} × (٢س - ٣) ،

بالتعويض عن ع

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ (س^{٢} - ٣ س + ١)^{٤} × (٢ س - ٣)

حاول أن تحل

(٥) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ باستخدام قاعدة السلسلة فى عمل تعاونى وتحقق من صحة عملك السابق.

مثال

(٦) إذا كانت ص = $\sqrt[3]{ع}$ ، ع = س^{٢} - ٣ س + ٢ **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$

الحل

∵ ص = ع$^{\frac{١}{٣}}$ $\quad\quad$ $\frac{د ص}{د ع} = \frac{١}{٣}$ ع$^{-\frac{٢}{٣}}$

∵ ع = س^{٢} - ٣س + ٢ $\quad\quad$ $\frac{د ع}{د س}$ = ٢ س - ٣

∵ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ $\quad$ $= \frac{١}{٣}$ ع$^{-\frac{٢}{٣}}$ (٢س - ٣) $\quad$ ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٣}$ (٢ س - ٣) (س^{٢} - ٣س + ٢)$^{-\frac{٢}{٣}}$

حاول أن تحل

(٦) إذا كانت ص = ٣ع^{٢} - ١ ، ع = $\frac{٥}{س}$ **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$

مشتقة الدالة [د(س)]^{ن}

إذا كانت ع = [د(س)]^{ن} حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى ،

فإن: $\frac{د ع}{د س}$ = ن [د(س)]$^{ن-١}$ × د′(س)

مثال

(٧) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان

أ ص = (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠} $\quad\quad$ ب إذا كانت ص = $(\frac{س - ١}{س + ١})^{٥}$

الحل

أ ص = (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠}

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ١٠ (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩} × $\frac{د}{د س}$ (٦س^{٣} + ٣س + ١)

= ١٠ (١٨ س^{٢} + ٣) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}

= ٣٠ (٦ س^{٢} + ١) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}

ب ص = $(\frac{س - ١}{س + ١})^{٥}$ $\quad$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ $(\frac{س - ١}{س + ١})^{٤}$ × $\frac{(س + ١) \times ١ - (س - ١) \times ١}{(س + ١)^{٢}}$

= ٥ $(\frac{س - ١}{س + ١})^{٤}$ × $\frac{س + ١ - س + ١}{(س + ١)^{٢}}$

= $\frac{١٠}{(س + ١)^{٢}}$ × $(\frac{س - ١}{س + ١})^{٤}$ = $\frac{١٠(س - ١)^{٤}}{(س + ١)^{٦}}$

حاول أن تحل

(٧) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت ص = $(\frac{٥س^{٢}}{٣س^{٢}+٢})^{٣}$

مثال

(٨) إذا كان د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س - ٤ أوجد قيم س التي تجعل د$'$(س) = ٢

الحل

د$'$(س) = $\frac{١}{٣}$ × ٣س^{٢} - ٢ × ٢ س + ٥ × ١

= س^{٢} - ٤ س + ٥

عندما د$'$(س) = ٢ ∴ س^{٢} - ٤س + ٥ = ٢ ويكون س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٠

∵ (س - ١) (س - ٣) = ٠ ∴ س = ١ أو س = ٣

حاول أن تحل

(٨) أوجد قيم س التى تجعل د$'$(س) = ٧ فى كل ممايأتى:

أ د(س) = س^{٣} - ٥ س + ٢ ب د(س) = (س - ٥)^{٧}

تمـــاريـن (٣ – ٣)

أكمل كلًّا ممايأتى:

(١) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{س^{٣}}$) = ...

(٢) $\frac{د}{د س}$ (π ٥) = ...

(٣) $\frac{د}{د س}$ (س$^{\frac{١}{٢}}$) = ...

(٤) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$) = ...

(٥) $\frac{د}{د س}$ (٥س^{٢} + ٣ س + ٢) = ...

(٦) $\frac{د}{د س}$ ($٢\sqrt[٨]{}$ س^{٧} - $\frac{س^{٥}}{٥}$ + π) = ...

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية بالنسبة إلى س.

(٧) ص = ٢س^{٦} + ٣$\sqrt[٨]{س}$

(٨) ص = $\frac{٤س^{٢} - ٣س + ٢\sqrt[٨]{س}}{س}$

(٩) ص = س (٣س^{٢} - $\sqrt[٨]{س}$)

(١٠) ص = $\frac{٤س^{٢} - س + ٣}{\sqrt[٨]{س}}$

(١١) ص = (س - ١) (س + ١) (س^{٢} + ١) (س^{٤} + ١) (س^{٨} + ١) (س^{١٦} + ١)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية

(١٢) ص = (س^{٢} + ٣) (س^{٣} - ٣س + ١)

(١٣) ص = (س^{٢} - $\sqrt[٨]{س}$) (س^{٢} + ٢ $\sqrt[٨]{س}$)

(١٤) ص = (٢ س^{٤} - ٣س + ٤) (س^{٢} - + $\sqrt[٣]{س}$ + $\frac{٢}{س}$)

(١٥) ص = $\frac{٥س - ٢}{٥ س + ١}$

(١٦) ص = $\frac{س^{٢} + ٢س + ٥}{س^{-٢} - ٥س + ١}$

(١٧) ص = $\frac{س - ٢}{س + ٥}$

(١٨) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٢ لكل ممايأتى:

أ ص = (س^{٣} + س - ٩)^{٥}

ب ص^{٣} = ٣س^{٢} - ٤

جـ ص = $\sqrt[٣]{(٢س^{٣} + ٤س + ٣)^{٢}}$

د ص = ع^{٢} ، ع = ٣س^{٢} - ٢

هـ ص = ٢ع^{٣} ، ع = ٨ س - ١١

و ص = $\frac{ع - ١}{ع + ١}$ ، ع = $\frac{س + ١}{س - ١}$

(١٩) إذا كان ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}، $\frac{د ص}{د س}$ = ٨ عندما س = ١، وكان متوسط تغير ص عندما تتغير س من - ١ إلى ٢ يساوي ٧ أوجد قيمتي الثابتين أ ، ب.

(٢٠) أوجد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقط المبينة فى كل ممايأتى:

أ ص = ($\frac{س^{٢} - ٢}{٣ + س^{٢}}$)^{٧} عند س = ٠

ب ص = (س^{٢} + ١)^{٥} (س^{٢} - س + ١)$^{-٤}$ عند س = ١

نشاط

(٢١) الربط بالحجوم يصب زيت بمعدل ١٠سم^{٣}/ث فى برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ٩٠سم. أوجد معدل ارتفاع الزيت فى البرميل.

تفكير إبداعى

(٢٢) أوجد $\frac{د}{د س}$ (ص^{ن})

(٢٣) إذا كانت ص = ٣ع^{٢} + ١ ، ع = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢}$ **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$ هل أحد الحلين الآتيين خطأ أم كلاهما صحيح.

الحل الأول

ص = ٣ع^{٢} + ١

ع = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢}$

وبالتعويض نجد أن

ص = ٣س^{٢} - ٥

$\frac{د ص}{د س}$ = ٦س

الحل الثانى

∵ ص = ٣ع^{٢} + ١ ∴ $\frac{د ص}{د ع}$ = ٦ ع

ع = (س^{٢} - ٢)$^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{د ع}{د س}$ = $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} - ٢)$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢س = $\frac{س}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢}}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د س}$

= ٦ $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢}$ × $\frac{س}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢}}$ = ٦س

مشتقات الدوال المثلثية

٣ - ٤

Derivatives of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- مشتقة الدوال المثلثية
 - د(س) = جا س
 - د(س) = جتا س
 - د(س) = ظا س

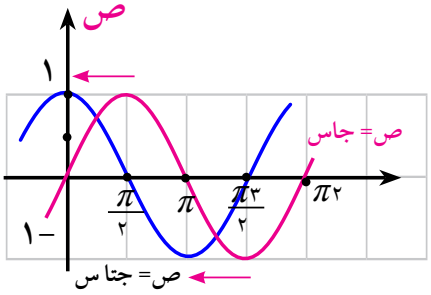
المصطلحات الأساسية

- مشتقة *Derivative*
- دالة مثلثية *Trigonometric Function*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

استكشف



فى دراستنا هذه تكون قياسات الزوايا بالتقدير الدائرى .

يوضح الشكل المقابل منحنى دالة الجيب ص = جا س وعند إزاحته إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{٢}$ يرسم منحنى دالة جيب التمام ص = جتا س

كما أن : جتا س = جا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)، لذلك يكتفى بإيجاد مشتقة جا س باستخدام التعريف واستنتاج باقى المشتقات المثلثية الأخرى.

مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Function

تعلم

مشتقة دالة الجيب

إذا كانت د(س) = جا س **فإن** دَ (س) = جتا س

∵ د(س) = جا س ، د(س + هـ) = جا (س + هـ)

∴ دَ (س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا(س + هـ) - جا س}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا س جتا هـ + جتا س جا هـ - جا س}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ [$\frac{جتا س جا هـ}{هـ}$ + $\frac{جا س (جتا هـ - ١)}{هـ}$]

= جتا س $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا هـ}{هـ}$ + جا س × $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{جتا هـ - ١}{هـ}$

= جتاس × ١ + جا س × ٠ = جتا س

أى أن : $\frac{د}{د س}$ (جاس) = جتاس

✺ **(البرهان غير مقرر على الطالب)**

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س فإن :

$\frac{د}{د س}$[جا ع] = جتا ع . $\frac{د ع}{د س}$ [قاعدة السلسلة]

مثال

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل ممايأتى :

أ ص = ٥ جا س ب ص = س^{٣} جا س ج ص = ٢ جا (٣س + ٤)

الحل

أ ∵ ص = ٥ جا س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ × $\frac{د}{د س}$ (جا س) = ٥ جتا س

ب ∵ ص = س^{٣}جا س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = س^{٣} × $\frac{د}{د س}$ (جا س) + جا س × $\frac{د}{د س}$ (س^{٣})

= س^{٣} جتا س + ٣ س^{٢} جا س

ج ∵ ص = ٢ جا (٣س +٤)

بوضع ع = ٣س + ٤ فتكون : ص = ٢ جا ع

∴ $\frac{د ع}{د س}$ = ٣ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جتا ع **وبتطبيق قاعدة السلسلة** ($\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د س}$ × $\frac{د ع}{د س}$)

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جتا ع × ٣ = ٢ جتا (٣س + ٤) × ٣ = ٦ جتا (٣س + ٤)

ويمكن إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ **مباشرة باستخدام التعميم السابق كالآتي:**

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ × جتا (٣ س + ٤) × ٣ = ٦ جتا (٣ س + ٤)

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل ممايأتى :

أ ص = س^{٢} + جا س ب ص = جا $\frac{\pi}{٤}$ - ٧ جا س ج ص = ٥ جا (٣- ٢س)

تعلم

١ - مشتقة دالة جيب التمام

إذا كانت ص = جتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = - جا س

٢ - مشتقة دالة الظل

إذا كانت ص = ظا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢} س

لاحظ أن:

(١) $\frac{د}{د س}$ (جتا س) = $\frac{د}{د س}$ [جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)]

= جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) × -١

= - جا س

(٢) $\frac{د}{د س}$ (ظا س) = $\frac{د}{د س}$ ($\frac{جا س}{جتا س}$)

= $\frac{جتا س \times جتا س - (-جا س) \times جا س}{جتا^{٢} س}$

= $\frac{جتا^{٢} س + جا^{٢} س}{جتا^{٢} س}$ = $\frac{١}{حتا^{٢} س}$ = قا^٢ س

مثال

(٢) أوجد المشتقة الأولى لكل من :

أ ص = ٢ جتاس - ظا ٥س

ب ص = ظا (١ - س^٢)

جـ ص = جتا^٢ (٤س^٢ -٧)

الحل

أ ∵ ص = ٢ جتاس - ظا ٥س

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ (- جا س) - قا^٢ ٥ س × ٥ = - ٢ جا س - ٥ قا^٢ ٥ س

ب ∵ ص = ظا (١ - س^٢) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = قا^٢ (١- س^٢) × -٢س = -٢س قا^٢(١- س^٢)

جـ ∵ ص = جتا^٣ (٤س^٢ -٧) بفرض ص = جتا^٣ ع حيث ع = ٤س^٢ -٧

∴ $\frac{د ص}{د ع}$ = ٣ جتا^٢ ع × - جا ع = -٣ جا ع جتا^٢ ع ، $\frac{د ع}{د س}$ = ٨ س

∵ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ = - ٢٤س جا ع جتا^٢ ع

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = - ٢٤ س جا (٤س^٢ - ٧) جتا^٢ (٤س^٢ -٧)

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من :

أ ص = ٢ طا٣س

ب ص = ٢ جتا (٤ -٣س^٢)

جـ ص = ٢ جا س جتا س

د ص = ٢ س طاس

هـ ص = طا^٢ ٣ س

و ص = ظا ٤س^٣

مثال

(٣) إذا كان ص = $\frac{جتا س}{١ - جا س}$ فأثبت أن (١- جا س) $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = $\frac{\pi}{٦}$

الحل

∵ ص = $\frac{جتا س}{١ - جا س}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(١ - جاس) (-حاس) - جتا س(- جتا س)}{(١ - جا س)^{٢}}$

$$\frac{ص}{س} = \frac{-جا\ س + جا^2 س + جتا^2 س}{(1 - جا\ س)^2} = \frac{1 - جا\ س}{(1 - جا\ س)^2}$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{1}{1 - جا\ س} \quad \text{أى أن : } (1 - جا\ س)\frac{ص}{س} = 1$$

عندما $س = \frac{\pi}{6}$ فإن $(1 - جا \frac{\pi}{6})\frac{ص}{س} = 1$

$$(1 - \frac{1}{2})\frac{ص}{س} = 1 \qquad \therefore \frac{ص}{س} = 2$$

تذكر أن

$جا^2 س + جتا^2 س = 1$

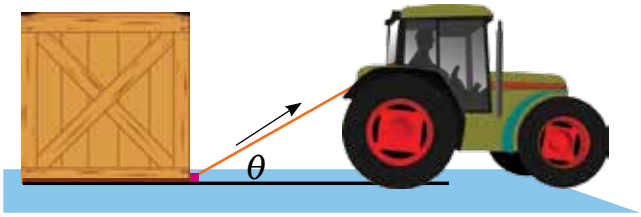
حاول أن تحل

(٣) إذا كانت $ص = ٢س\ جا\ س\ جتا\ س$ **فأثبت أن:** $\frac{ص}{س} = جا\ ٢س + ٢س\ جتا\ ٢س$

نشاط

(٤) **الربط بالميكانيكا:** قوة مقدارها ق أثرت على جسم وزنه (و) فى اتجاه يصنع زاوية قياسها θ مع اتجاه الحركة وكان مقدار القوة يعطى بالقاعدة $ق = \frac{م\ و}{م\ جا\theta + جتا\theta}$

حيث م ثابت يسمى بمعامل الاحتكاك



أ أوجد معدل تغير القوة ق بالنسبة للزاوية θ

ب متى يكون معدل التغير يساوى صفرًا؟

إجابة اسئلة النشاط:

أ $ق = \frac{م\ و}{م\ جا\theta + جتا\theta} = م\ و\ (م\ جا\theta + جتا\theta)^{-1}$

معدل تغير القوة بالنسبة إلى $\theta = \frac{ق}{\theta}$

$$= -م\ و\ (م\ جا\theta + جتا\theta)^{-2}\ (م\ جتا\theta - جا\theta) = \frac{-م\ و\ (م\ جتا\theta - جا\theta)}{(م\ جا\theta + جتا\theta)^2}$$

ب عندما $\frac{ق}{\theta} = 0$ $\therefore م\ و\ (م\ جتا\theta - جا\theta) = 0$

$\therefore م\ جتا\theta - جا\theta = 0$ $م\ جتا\theta = جا\theta$ $م = \frac{جا\theta}{جتا\theta} = ظا\theta$

تطبيق على النشاط

(٤) إذا كان $ص = جا^2 س - جتا\ ٢س - ٤س$:

أ أوجد معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س .

ب أوجد قيم $س \in]0، \pi[$ عندما يكون معدل التغير مساويًا -١

تفكير إبداعى: أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان

(أ) ص = جا (ط٣ س)

(ب) ص = جا س حيث س مقيسه بالتقدير الستينى

تمـاريـن (٣ - ٤)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت : ص = جا (٢ س+٥) فإن ص َ =

(أ) ٢ جتا ٢س (ب) - ٢ جتا ٢ س (ج) جتا (٢ س + ٥) (د) ٢ جتا (٢س +٥)

(٢) إذا كانت ص = ٣س - جتا ٢ س فإن ص َ=

(أ) ٣ - جا ٢ س (ب) ٣ + جا ٢ س (ج) ٣ + ٢ جا ٢ س (د) ٣ - ٢ جا ٢ س

(٣) إذا كانت ص = ٣ جتا (٢ - ٤س) فإن ص َ=

(أ) ٤ جا (٢ - ٤س) (ب) ١٢ جا (٢ - ٤س) (ج) - ٦ جا (٢ - ٤س) (د) - ١٢ جا (٢ - ٤س)

(٤) إذا كانت د(س) = ظا (٥س - π) فإن د َ ($\frac{\pi}{٤}$) =.....

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{٢}$ (ج) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

أكمل كلًّا ممايأتى:

(٥) $\frac{د}{د س}$ (جتا س - جا س) = ...

(٦) $\frac{د}{د س}$ (ط٣ س^{٢}) = ...

(٧) $\frac{د}{د س}$ (حتا٢π) = ...

(٨) $\frac{د}{د س}$ (جتا^{٢} س + جا^{٢} س) = ...

(٩) $\frac{د}{د س}$ (س جتا س) = ...

(١٠) أوجد نهـــا $_{س \leftarrow ا}$ $\frac{جا س - جا ا}{س - ا}$ = ...

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل ممايأتى:

(١١) ص = جا (٤س + ٧)

(١٢) ص = جا (س^{٢} + ٣)

(١٣) ص = جتا (٥س + ٣)

(١٤) ص = ٣ ظا (٢س + ٣)

(١٥) ص = ظا (- ٥س^{٢} + ١٩)

(١٦) ص = جا (حتا^{٢}س)

(١٧) ص = $\frac{ط اس}{س}$

(١٨) ص = س جا (٣ س - ٢)

(١٩) ص = $\frac{س}{جتا س}$

(٢٠) ص = س^{٢} جا (٢س^{٢} + ٥)

(٢١) ص = $\frac{جا س}{١ + جتا س}$

(٢٢) ص = قا^{٢}س - ١

(٢٣) ص = جا $(\frac{١}{س^{٢}})$

(٢٤) ص = ظا $\sqrt{س}$

(٢٥) ص = ٤ جتا^{٥}س

(٢٦) ص = ٤ س + ٥ جا٤ س

(٢٧) ص = $\sqrt{٣ س - جا^{٢} ٤س}$

(٢٨) ص = جتا^{٣} $(\frac{س}{س + ١})$

(٢٩) ص = $\sqrt{جتا (٥س)}$

(٣٠) ص = جتا (جتا س)

(٣١) ص = $\frac{ظا س + ظا \frac{\pi}{٤}}{١ - ظا س ظا \frac{\pi}{٤}}$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية:

(٣٢) ص = ٥ - جا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٣٣) ص = جا س + جا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٣٤) ص = س جتا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٣٥) ص = س $\sqrt{جا س}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٣٦) أثبت أن المماس للمنحنى ص = جتا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi ٣}{٤}$.

(٣٧) إذا كانت ص = جا^{٢}س - جتا^{٢}س أثبت أن $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جا ٢ س

(٣٨) إذا كانت ص = (جا س + جتا س)^{٢} أثبت أن $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جتا ٢ س

(٣٩) إذا كانت ص = $\frac{جا س}{١ + جتا س}$ أثبت أن (١ + جتا س) $\frac{د ص}{د س}$ = ١

(٤٠) إذا كانت ص = قا ٤ س أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

٣ - ٥ تطبيقات على المشتقة

Application of the Derivative

سوف تتعلم
- ميل المماس لمنحنى الدالة
- ميل العمودى

المصطلحات الأساسية
- ميل المماس *Slope of the tangent*
- ميل العمودى *Slope of the normal*
- الإزاحة *Displacement*
- السرعة *Velocity*
- العجلة *Acceleration*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تذكر أن

ميل المستقيم
أ س + ب ص + جـ = ٠
يساوى $\frac{-أ}{ب}$

تمهيد

تتطلب التطبيقات الهندسية على مشتقة الدالة إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة تقع عليه كذلك تذكر العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين.

ميل المماس والعمودى على منحنى

Slope of the Tangent and the Normal to a Curve

علمت فى هذه الوحدة أن:

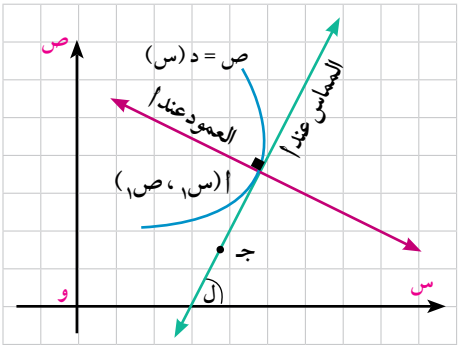
- المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د(س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه.

أى أن: ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند النقطة أ (س$_١$، ص$_١$) الواقعة عليه

= $[\frac{د ص}{د س}]_{(س_١، ص_١)}$.

ويكون

ظا ل = $[\frac{د ص}{د س}]_{(س_١، ص_١)}$



حيث ل قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

لاحظ أن :

- إذا كان م$_١$ ، م$_٢$ ميلى مستقيمين معلومين ل$_١$، ل$_٢$ فإن:
- ل$_١$ // ل$_٢$ إذا وفقط إذا كان م$_١$ = م$_٢$ **(شرط التوازى)**
- ل$_١$ ⊥ ل$_٢$ إذا وفقط إذا كان م$_١$ م$_٢$ = -١ **(شرط التعامد)**

وعلى ذلك فإن :

ميل العمودى على المنحنى ص = د(س) عند النقطة (س$_١$، ص$_١$) الواقعة عليه = $\frac{١}{[\frac{د ص}{د س}]_{(س_١، ص_١)}}$ -

مثال

(١) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = س^{٣} - ٤س + ٣ والتى يصنع عندها المماس زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل

∵ ص = س^{٣} - ٤س + ٣ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} - ٤

∴ المماس يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ ميل المماس = ظا ١٣٥ = -١

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} - ٤ = -١ ∴ ٣س^{٢} = ٣ ∴ س = ± ١

عندما س = -١ ∴ ص = (-١)^{٣} - ٤(-١) + ٣ = ٦

، عندما س = ١ ∴ ص = ١ - ٤ + ٣ = ٠

∴ النقط هى (-١ ، ٦) ، (١، ٠)

حاول أن تحل

(١) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = س^{٢} - ٢س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

أ موازيًا محور السينات ب عموديًّا على المستقيم س - ٤ ص + ١ = ٠

مثال

(٢) أوجد ميل العمودى على المنحنى ص = ظا ($\frac{٢}{٣}$ س - π) عند النقطة (π، $\sqrt{٣}$)

الحل

∵ ص = ظا ($\frac{٢}{٣}$ س - π) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢}{٣}$ قا^{٢} ($\frac{٢}{٣}$ س - π)

ميل المماس للمنحنى عند النقطة (π، $\sqrt{٣}$) = $\frac{٢}{٣}$ قا^{٢} (π - $\frac{\pi ٢}{٣}$)

= $\frac{٢}{٣}$ - قا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ = ٤ × $\frac{-٢}{٣}$ = $\frac{-٨}{٣}$

ميل العمودى عند النقطة (π، $\sqrt{٣}$) = $\frac{٣}{٨}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها العمودى على المنحنى ص = $\sqrt{٧ + ٢س^{٢}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (-٣، ٥) لأقرب دقيقة .

تفكير إبداعى :

أوجد قيمة أ التى تجعل المستقيم ص = ٤س + أ مماسًا للمنحنى ص = س^{٢} + ٥

تعلم

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

Equation of the Tangent and the Normal to a Curve

إذا كانت (س$_{١}$، ص$_{١}$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د(س) ، م ميل المماس عند هذه النقطة فإن:

١ - معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) هى :

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

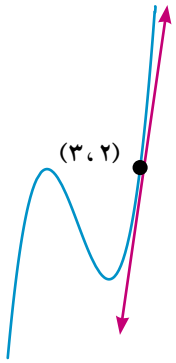
٢ - معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) هى :

$$ص - ص_{١} = \frac{-١}{م} (س - س_{١})$$

مثال

(٣) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ٢

الحل



∵ ص = ٢ س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣

∴ عند س = ٢ ∴ ص = ٢(٢)^{٣} - ٤(٢)^{٢} + ٣ = ٣

∴ النقطة (٢ ، ٣) تقع على المنحنى

∵ $\frac{ود ص}{ود س}$ = ٦س٢ - ٨س ∴ $[\frac{ود ص}{ود س}]_{(٢، ٣)}$ = ٦(٢)^{٢} - ٨(٢) = ٨

∴ ميل المماس = ٨ وتكون معادلته

ص - ٣ = ٨ (س - ٢) أى ص - ٨ س + ١٣ = ٠

ميل العمودى = $\frac{-١}{٨}$ وتكون معادلته

ص - ٣ = $\frac{-١}{٨}$ (س -٢) أى ٨ ص + س - ٢٦ = ٠

حاول أن تحل

(٣) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١.

هل النقطة أ (-٣، ٤) تقع على المماس ؟ **فسر إجابتك**

مثال

(٤) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٤ س - ظا س عند النقطة $(\frac{\pi}{٤}، د(\frac{\pi}{٤}))$

الحل

∵ ص = ٤س - ظا س ∴ $\frac{ص}{س}$ = ٤ - قا^{٢}س

عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ م = ٤ - قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = ٢

وبالتعويض عن س= $\frac{\pi}{٤}$ في معادلة المنحنى **نجد أن:** ص = π- ظا $\frac{\pi}{٤}$ = π - ١

أى أن: النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π -١) تقع على المنحنى

∴ معادلة المماس عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π -١) هى: ص - (π -١) = ٢ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

ص - π + ١ = ٢ س - $\frac{\pi}{٢}$ ص = ٢ س + $\frac{\pi}{٢}$ - ١

حاول أن تحل

(٤) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = س جا٢ س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

مثال

(٥) إذا كان المنحنى ص = أس^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨س +٥ عند النقطة (-١، -٣) فأوجد قيمتى أ ، ب.

الحل

∵ النقطة (-١ ، -٣) تقع على المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}

∴ -٣ = أ(-١)^{٣} + ب(-١)^{٢} أى أ-ب = ٣ (١)

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه = $\frac{ص}{س}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

∵ المستقيم ص = ٨س + ٥ مماس للمنحنى عند النقطة (-١، -٣)

∴ [$\frac{ص}{س}$] $_{(-١ ، -٣)}$ = ميل المستقيم = ٨

∴ ٣ أ (-١)^{٢} + ٢ ب(-١) = ٨ أى ٣ أ - ٢ ب = ٨ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) **نجد أن:** أ = ٢ ، ب = -١

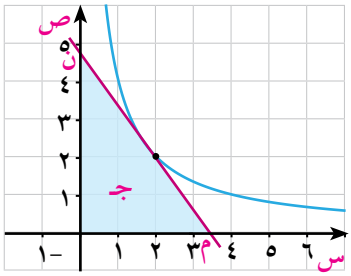
حاول أن تحل

(٥) أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب عند النقطة (١، ٣) الواقعة عليه يساوي ٥

مثال

الربط بالمساحات

(٦) إذا كان المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{س}$ عند النقطة جـ فى الربع الأول يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين م، ن فأثبت أن مساحة△ م و ن ثابتة، ولا تعتمد على موضع النقطة جـ الواقعة على منحنى الدالة.



الحل

∵ ص = ٤س$^{-١}$

نفرض أن جـ (أ ، $\frac{٤}{أ}$) ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{-٤}{س^{٢}}$

∴ ميل المماس عند جـ (أ ، $\frac{٤}{أ}$) يساوى $\frac{-٤}{أ^{٢}}$

معادلة المماس عندأ هى : ص - $\frac{٤}{أ}$ = - $\frac{٤}{أ^{٢}}$ (س - أ)

بالضرب × أ^{٢} ∴ أ^{٢} ص -٤ أ = -٤س + ٤ أ

∴ معادلة $\overleftrightarrow{م ن}$ هى أ^{٢} ص + ٤ س = ٨ أ

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ مع محور السينات فإن ص = ٠

∴ س = ٢ أ أى أن و م = ٢أ من الوحدات

لإيجاد نقط تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ مع محور الصادات فإن س = ٠

∴ ص = $\frac{٨}{أ}$ أى أن و ن = $\frac{٨}{أ}$ من الوحدات

∴ مساحة△ م و ن = $\frac{١}{٢}$ × ٢ أ × $\frac{٨}{أ}$ = ٨ وحدة مربعة

وهى كمية ثابتة لاتعتمد على إحداثيي نقطة جـ الواقعة على المنحنى.

٩ حاول أن تحل

الربط بالمساحات:

٦ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى ص = س^{٢} - ٦س + ١٣ عند النقطة (٤، ٥) الواقعة عليه.

تمـــاريـن (٣ – ٥)

١ أكمل كلًّا مما يأتي:

أ ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند أى نقطة عليه هو

ب ميل المماس للمنحنى ص = جتا س عندما س = $\frac{\pi}{٣}$ يساوى

جـ إذا كان المستقيم ص = ٨ - ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣، -١) فإن د/(٣) يساوى

د المماس للمنحنى ص = (٣ س -٥)^{٣} عند النقطة (١،٢) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها يساوى

هـ ميل العمودى على المنحنى ص = جا ٢ س عند النقطة التى تقع على المنحنى و إحداثيها السينى = $\frac{\pi}{٦}$ يساوى

و معادلة المماس للمنحنى ص = (س-١)^{٢} عند النقطة (٢ ، ١) هى

أجب عن ما يأتي:

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^{٢} + $\frac{١}{س}$ -١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س =١

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\frac{س+٣}{س-٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٣، ٦)

٤ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} - ٦س^{٢} - ١٥س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات .

٥ أوجد النقط على المنحنى ص =٣س^{٣} - ١١س + ٥ والتى يكون عندها المماس

أ موازيًا للمستقيم ٢ س + ص - ٥ = ٠ ب عموديًّا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

جـ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها =-١١

٦ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = (س - ٢) (س + ١) عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.

٧ أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى ص = $\frac{س^{٢}-١}{٢-س^{٢}}$ عندما س = ٠

٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢ جاس + جتا س عند النقطة (٠، ١).

٩ أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى ص = س^{٢} + س -١ عند النقطة (١، ١) يكون عموديًّا على المماس المرسوم للمنحنى ص = ٢ - $\sqrt{٣}$ س عند نفس النقطة .

١٠ إذا كان المنحنى ص = (س^{٢} - ٢س) (أ س + ب) يمس محور السينات عند النقطة (٢، ٠) ، ويمس المستقيم ص = ٢ س عند نقطة الأصل فأوجد قيمتى أ ، ب.

التكامل

٣ - ٦

Integration

سوف تتعلم
- المشتقة العكسية للدالة
- تكامل بعض الدول الجبرية
- تكامل بعض الدول المثلثة

المصطلحات الأساسية
- المشتقة العكسية *Antiderivative*
- تكامل *Integraation*

الأدوات المستخدمة
- ألة جاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

استكشف

درست الاشتقاق وأصبحت قادرًا على إيجاد المشتقة قَ إذا علمت الدالة ق حيث قَ(س) = $\frac{ك ق}{ك س}$ = ق(س) وسوف نتناول فى هذا الدرس عملية عكسية لعملية الاشتقاق بمعنى أن إذا عُلِمَت المشتقة قَ فكيف نحصل على الدالة الأصلية ؟



لإيجاد دالة أصلية مشتقتها بالنسبة إلى س هى ٥س٤

نفرض د(س) = ٥س٤

ولنبدأ بطريقة عكسية لعملية الاشتقاق

ن س ن-١ = ٥س٤ ∴ ن -١ = ٤ ، ن = ٥

فيكون ت(س) = س٥ أو س٥ +٣ أو س٥ -٢

تسمى الدالة ت دالة المشتقة العكسية أو الدالة الاصلية للدالة د

تعلم

المشتقة العكسية *Anti derivative*

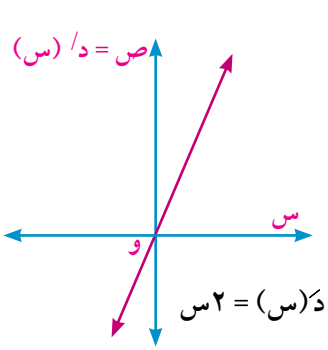
إذا كانت ص = س٢

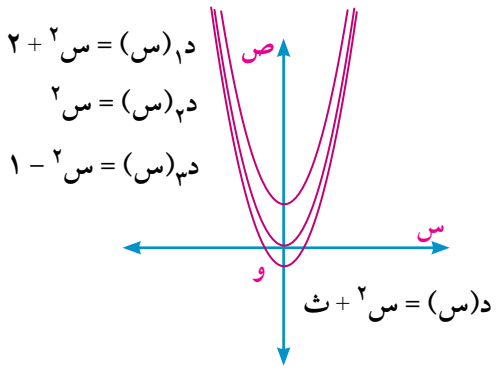
فإن المشتقة الأولى هى $\frac{ك ص}{ك س}$ = ٢ س

أما استنتاج الدالة ص من الدالة المشتقة $\frac{ك ص}{ك س}$ فتسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية.

فمثلاً س٢ هى مشتقة عكسية للدالة ٢س لاحظ أن ٢س لها العديد من المشتقات العكسية منها س٢ - ١ ، س٢ + ٢ ، س٢ + ث حيث ث ∋ ع ، ... جميعها مشتقتها ٢ س.

∴ $\frac{ك}{ك س}$ (س٢ + ث) = ٢ س حيث (ث) مقدار ثابت والأشكال الآتية توضح ذلك.





تعريف يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت ت`(س) = د(س) لكل س فى مجال د.

مثال

(١) أثبت أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س^{٣}.

الحل

نوجد مشتقة الدالة ت فيكون ت` (س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤س^{٣} = ٢ س^{٣}

∴ ت` (س) = د(س) أى أن الدالة (ت) مشتقة عكسية للدالة د

حاول أن تحل

(١) بين أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س^{٥}

تفكير ناقد :

ما العلاقة بين ت$_{١}$، ت$_{٢}$ إذا كانت كل منهما مشتقة عكسية للدالة د؟

التكامل غير المحدد *Indefinite Integral*

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة، ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س) ى س

[ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف إذا كان ت`(س) = د(س) فإن $\int$ د(س) ى س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت إختيارى (ثابت التكامل).

لاحظ أن :

$\frac{ى}{ى س}$ (س^{٣} + ٥) = ٣س^{٢} ∴ $\int$ ٣ س^{٢} ى س = س^{٣} + ث

$\frac{ى}{ى س}$ (س^{٥} - ٣) = ٥س^{٤} ∴ $\int$ ٥ س^{٤} ى س = س^{٥} + ث

$\frac{ى}{ى س}$ (٢س^{٧}) = ١٤س^{٦} ∴ $\int$ ١٤ س^{٦} ى س = ٢س^{٧} + ث

ولتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

(٢) **تحقق من صحة كل مايأتى:**

أ $\int$ س^{٧} ى س = $\frac{١}{٨}$ س^{٨} + ث

ب $\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ ى س = $\sqrt{١ + س^{٢}}$ + ث

الحل

أ ∵ $\frac{د}{د س}(\frac{١}{٨} س^{٨} + ث) = س^{٧}$ ∴ $\int س^{٧} د س = \frac{١}{٨} س^{٨} + ث$

ب ∵ $\frac{د}{د س}(\frac{١}{٢} \sqrt{١ + س^{٢}} + ث) = \frac{٢س}{٢\sqrt{١ + س^{٢}}} = \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$

∴ $\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}} د س = \sqrt{١ + س^{٢}} + ث$

حاول أن تحل

(٢) **تحقق من صحة كل ممايأتى:**

أ $\int س^{-٤} د س = \frac{-١}{٣} س^{-٣} + ث$

ب $\int س \sqrt{١ + س^{٢}} د س = \frac{١}{٣}(١ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

قاعدة:

$$\int س^{ن} د س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث \quad \text{حيث ث ثابت ، ن عدد نسبى ، ن} \neq -١$$

مثال

أوجد:

(٣) أ $\int س^{٥} د س$

ب $\int س^{-٣} د س$

جـ $\int س^{\frac{٢}{٥}} د س$

د $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٣}}} د س$

الحل

أ $\int س^{٥} د س = \frac{س^{٥+١}}{٥+١} + ث = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

جـ $\int س^{\frac{٢}{٥}} د س = \frac{١}{\frac{٧}{٥}} س^{\frac{٢}{٥}+١} + ث$

$= \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + ث$

ب $\int س^{-٣} د س = \frac{س^{-٣+١}}{-٢} + ث = -\frac{١}{٢} س^{-٢} + ث$

د $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٣}}} د س = \int س^{\frac{-٣}{٥}} د س$

$= \frac{١}{\frac{٢}{٥}} س^{\frac{-٣}{٥}+١} + ث = \frac{٥}{٢} س^{\frac{٢}{٥}} + ث$

حاول أن تحل

(٣) أوجد:

أ $\int س^{٨} د س$

ب $\int س^{\frac{٢}{٣}} د س$

جـ $\int \sqrt[٥]{س^{٧}} د س$

د $\int ٧ س^{\frac{٧}{٩}} د س$

خواص التكامل: *Properties of Integration*

إذا كان د، ر دالة قابلة للاشتقاق على فترة ما فإن:

١- $\int$ ا د(س) ﻫ س = ا $\int$ د(س) ﻫ س حيث ا ثابت ≠ ٠

٢- $\int$[د(س) ± ر (س)] ﻫ س = $\int$ د(س) ﻫس ± $\int$ ر (س) ﻫ س

مثال

٤ أوجد: أ $\int$ (٤ س + ٣س^{٢}) ﻫس ب $\int \frac{(س^{٢}+٢)^{٢}}{س^{٢}}$ ﻫ س

الحل

أ $\int$ (٤س +٣س^{٢}) ﻫس

= $\int$ ٤س ﻫ س + $\int$ ٣س^{٢} ﻫ س

= ٤ $\int$ س ﻫ س + ٣ $\int$ س^{٢} ﻫس

= $\frac{٤}{٢}$ س^{٢} + ٣ × $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ث

= ٢ س^{٢} + س^{٣} + ث

ب $\int \frac{(س^{٢}+٢)^{٢}}{س^{٢}}$ ﻫ س

= $\int \frac{س^{٤}+٤س^{٢}+٤}{س^{٢}}$ ﻫ س

= $\int$ س^{٢} ﻫ س + $\int$ ٤ ﻫس + $\int$ ٤س$^{-٢}$ ﻫ س

= $\frac{١}{٣}$ س^{٣} +٤ س - ٤س$^{-١}$ + ث

حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ $\int$ (٢ + $\sqrt{س}$ + $\frac{١}{\sqrt{س}}$) ﻫ س ب $\int$ ($\frac{١}{س^{٢}}$ + $\sqrt{س}$ + ٣) ﻫس

بعض قواعد التكامل: *Some rules of integration*

١- $\int$ (ا س + ب)^{ن} ﻫس = $\frac{١}{ا}$ × $\frac{(ا س + ب)^{ن+١}}{ن+١}$ + ث ، ن ≠ -١

٢- $\int$ [د(س)]^{ن} د'(س) ﻫس = $\frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١}$ + ث، حيث ث ثابت، ن عدد نسبى ≠ -١

تفكير ناقد:

١- هل يمكنك التحقق من صحة العلاقتين السابقتين عن طريق تعريف المشتقة العكسية؟ وضح ذلك.

مثال

٥ أوجد:

أ $\int$ ((٣ - ٢س)^{٥} + ٣)) ﻫ س ب $\int \frac{س+٣}{(س-٢)^{٤}}$ ﻫ س

جـ $\int (س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٧} (٢س - ٣)\, د س$ د $\int (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١١} (٣س - ١)\, د س$

الحل

أ $\int \left((٣ - ٢س)^{٥} + ٣\right) د س = \int (٣ - ٢س)^{٥} د س + \int ٣\, د س$

$= \frac{(٣ - ٢س)^{٦}}{-٢ \times ٦} + ٣س + ث = \frac{-١}{١٢} (٣ - ٢س)^{٦} + ٣س + ث$

ب $\int \frac{س + ٣}{(س - ٢)^{٤}} د س = \int \frac{(س - ٢) + ٥}{(س - ٢)^{٤}} د س = \int \frac{س - ٢}{(س - ٢)^{٤}} د س + \int \frac{٥}{(س - ٢)^{٤}} د س$

$= \int (س - ٢)^{-٣} د س + ٥ \int (س - ٢)^{-٤} د س$

$= \frac{(س - ٢)^{-٢}}{-٢ \times ١} + \frac{٥ (س - ٢)^{-٣}}{-٣ \times ١} + ث = \frac{-١}{٢ (س - ٢)^{٢}} - \frac{٥}{٣ (س - ٢)^{٣}} + ث$

جـ $\int (س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٧} (٢س - ٣)\, د س$

$\because$ د(س) $= س^{٢} - ٣س + ٥$ ، $\therefore$ د$'$(س) $= ٢س - ٣$

$\therefore \int (س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٧} (٢س - ٣)\, د س = \frac{(س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٦}}{-٦} + ث$

$= \frac{-١}{٦} (س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٦} + ث$

د $\int (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١١} (٣س - ١)\, د س$

$\because$ د(س) $= ٣س^{٢} - ٢س + ١$ ، $\therefore$ د$'$(س) $= \frac{١}{٢} (٦س - ٢)$

$\therefore \frac{١}{٢} \int (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١١} (٦س - ٢)\, د س = \frac{١}{٢} \frac{(٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١٢}}{١٢} + ث$

$= \frac{١}{٢٤} (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١٢} + ث$

٩ حاول أن تحل

٥ أوجد:

أ $\int (٣س + ٥)^{-٩} د س$ ب $\int (س + ١)(س + ٣)^{٧} د س$

جـ $\int (س^{٢} + ٣س - ٢)^{٩} (٢س + ٣)\, د س$ د $\int س (٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)^{٥} (٢س - ١)\, د س$

ابحث: من مصادر المعرفة والشبكة العنكبوتية عن $\int \frac{١}{س}\, د س$

تكامل بعض الدوال المثلثية

Integration of Some Trignometric Functions

١- $\int$ جاس ء س = - جتا س + ث

٢- $\int$ جتا س ء س = جا س + ث

٣- $\int$ قا^{٢} س ء س = ظا س + ث

حيث ث ثابت إختيارى

تذكر أن

بعض العلاقات المثلثية

أ) جتا^{٢} س + جا^{٢} س = ١

ب) جتا^{٢} س - جا^{٢} س = جتا ٢ س

ج) ١ + ظا^{٢} س = قا^{٢} س

د) ٢ جا س جتا س = جا ٢ س

مثال

٦ أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ (س - جا س) ء س

ب) $\int$ (٤ جتا س + $\frac{١}{\text{حتا}^{٢}\ س}$ + ١) ء س

الحل

أ) $\int$ (س - جا س) ء س = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + جتا س + ث

ب) $\int$ (٤ جتا س + $\frac{١}{\text{حتا}^{٢}\ س}$ + ١) ء س = $\int$ (٤ جتا س + قا^{٢} س + ١) ء س

= ٤ جا س + ظا س + س + ث

حاول أن تحل

٦ أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ (٦ جتا س - ٨ جا س) ء س

ب) $\int$ (٣ + ٤ ظا^{٢} س) ء س

نتائج هامة :

١- $\int$ جا (أ س + ب) ء س = - $\frac{١}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث

٢- $\int$ جتا (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث

٣- $\int$ قا^{٢} (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث حيث ث ثابت اختيارى

تفكير ناقد:

١- تحقق من صحة العلاقات السابقة بإيجاد المشتقة العكسية مستخدما قاعدة السلسلة.

مثال

٧ أوجد:

أ) $\int$ جتا (٢س + ٣) ء س

ب) $\int$ (قا^{٢} $\frac{س}{٢}$ - جا ($\frac{\pi}{٤}$ - س)) ء س

الحل

أ $\int$ جتا(٢س + ٣) د س $= \frac{١}{٢}$ جا (٢ س + ٣) + ث

ب $= \int$ قا^{٢} ($\frac{١}{٢}$ س) د س - $\int$ جا ($\frac{\pi}{٤}$ - س) د س

$= \frac{١}{\frac{١}{٢}}$ ظا $\frac{س}{٢}$ - [$\frac{-١}{-١}$ جتا ($\frac{\pi}{٤}$ - س)] + ث

$= ٢$ ظا $\frac{س}{٢}$ - جتا ($\frac{\pi}{٤}$ - س) + ث

حاول أن تحل

(٧) أوجد :

أ $\int$ جا(٣س - ٥) د د س ب $\int$ جتا ($\frac{س}{٣}$ - ٢) د س

تمـــارين (٣ - ٦)

أكمل كلًّا مما يأتى:

(١) المشتقة العكسية للدالة (٣س^{٢} - ٢س + ٥) هى

(٢) $\int$ ($\frac{٥}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ + $\frac{\sqrt[٣]{س^{٢}}}{٥}$) د س = ...

(٣) $\int$ (٤س - جا $\frac{\pi}{٣}$) د س = ...

(٤) $\int$ (س + ٥)^{٣} د س = ...

(٥) $\int$ (س + ٢) (س^{٢} + ٤س - ٧)^{١١} د س = ...

(٦) $\int$ (جتا س جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جا س جا $\frac{\pi}{٤}$) د س = ...

(٧) $\int \frac{\text{حتا}^{٢} س}{١ + \text{جا س}}$ د س = ...

(٨) $\int$ ٢ظا س قا^{٢} س د س = ...

احسب التكاملات الآتية :

(٩) $\int$ ٩ س^{٨} د س

(١٠) $\int$ ١٢ س$^{-٢}$ د س

(١١) $\int$ ٥ $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ د س

(١٢) $\int -\frac{٨}{٥}$ ف$^{-٣}$ د ف

(١٣) $\int$ ٢(٣ع^{٢} - ٥) د ع

(١٤) $\int$ ٣ س^{٢} + س - ٢) د س

(١٥) $\int$ (٣ $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ - $\frac{٢}{س^{٣}}$) د س

(١٦) $\int$ (أ س^{٢} + ٥س + جـ) د س

(١٧) $\int$ س(س + ٣) د س

(١٨) $\int$ س^{٢} (٣س - $\frac{٥}{س}$) د س

(١٩) $\int$ (س - ٢)(س+٢) د س

(٢٠) $\int$ (س - ٥) (س+ ١) د س

(٢١) $\int$ ($\sqrt[٣]{س^{٢}}$ - ١)^{٢} د س

(٢٢) $\int$ (س + $\frac{١}{س}$)^{٢} د س

(٢٣) $\int \frac{٢س^{٢}+٣}{س^{٢}}$ د س

(٢٤) $\int \frac{س^{٧}-٤س^{٥}+س^{٣}}{س^{٣}}$ د س

(٢٥) $\int \frac{س^{٢}-١}{س-١}$ د س

(٢٦) $\int \frac{س^{٣}-٢٧}{س-٣}$ د س

(٢٧) $\int \frac{س^{٣}+٨}{س^{٢}-٢س+٤}$ د س

(٢٨) $\int \frac{س^{٢}-٥س+٦}{س-٢}$ د س

(٢٩) $\int ٦(س-٢)^{٥}$ د س

(٣٠) $\int ٣(س+٣)^{-٤}$ د س

(٣١) $\int (٨-٣س)^{٤}$ د س

(٣٢) $\int (٢ع-٣)^{\frac{٧}{٣}}$ د ع

(٣٣) $\int \frac{١٢}{(٢س-٥)^{٤}}$ د س

(٣٤) $\int \frac{٧}{\sqrt[٨]{٤+س}}$ د س

(٣٥) $\int (س-١)(س^{٢}-٢س+١)$ د س

(٣٦) $\int \sqrt[٨]{س-٣}\,(س-٣)^{٤}$ د س

(٣٧) $\int (س^{٢}-٢)^{٢}$ د س

(٣٨) $\int س(٣س^{٢}-٥)^{٣}$ د س

(٣٩) $\int س(٥س^{٢}+٢)^{-٧}$ د س

(٤٠) $\int \frac{س^{٣}}{(س^{٤}+١)^{٦}}$ د س

(٤١) $\int (٧جاس-٢جتاس)$ د س

(٤٢) $\int (حا٢س-٣جتاس)$ د س

(٤٣) $\int ٩(جتاس-قا^{٢}٣س)$ د س

(٤٤) $\int (٣+٥قا^{٢}س)$ د س

(٤٥) $\int جا(٥س-١)$ د س

(٤٦) $\int جتا(٢-س)$ د س

(٤٧) $\int جا(\frac{س}{٤}+\frac{\pi}{٣})$ د س

(٤٨) $\int (حتا^{٢}س-حا^{٢}س)$ د س

(٤٩) $\int ٢حتا^{٢}س$ د س

(٥٠) $\int (٤-جا^{٢}س)$ د س

ملخص الوحدة

دالة التغير - معدل التغير

- إذا كانت ص = د(س) وتغيرت س من س إلى س + هـ فإن دالة التغير ت(هـ) = د(س + هـ) - د(س)
- دالة متوسط التغير م(هـ) = $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$
- دالة معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$
- يطلق على معدل التغير المشتقة الأولى للدالة، ونرمز لها بالرمز د′(س) حيث :

د′(س) = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ [ويرمز للمشتقة الأولى بأحد الرموز : $\frac{ى ص}{ى س}$ أو ص′ أو د′ (س)]

قابلية الاشتقاق:

- يقال: إن الدالة د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ إذا وفقط إذا كان:

د′(أ$^-$) = $\lim_{س \to أ^-}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ لها وجود، د′(أ$^+$) = $\lim_{س \to أ^+}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ لها وجود، د′(أ$^-$) = د′ (أ$^+$).

إذا كانت د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند س = أ

اتصال دالة عند نقطة لايعنى بالضرورة أنها قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

إذا كانت الدالة د غير متصلة عند النقطة س = أ فإن د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

جدول مشتقات بعض الدوال:

د(س)	د′(س)	د(س)	د′(س)
س^ن	ن س$^{ن-١}$	جا أ س	أ جتا أ س
أ س^ن	أن س$^{ن-١}$	جتا أ س	- أ جا أ س
أ	٠	ظا أ س	أ قا^٢ أ س

مشتقة جاصل ضرب دالتين:

- إذا كانت ص = و(س). ع(س) فإن $\frac{ى ص}{ى س}$ = و $\frac{ى ع}{ى س}$ + ع . $\frac{ى و}{ى س}$

مشتقة خارج قسمة دالتين:

- إذا كانت ص = $\frac{و(س)}{ع(س)}$ حيث ع(س) ≠ ٠ فإن $\frac{ى ص}{ى س}$ = $\frac{ع \times \frac{ى و}{ى س} - ق \times \frac{ى ع}{ى س}}{[ع(س)]^٢}$

مشتقة دالة الدالة

➢ إذا كانت ص = [د(س)]^{ن} فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ن [د(س)]$^{ن-١}$ دَ(س)

قاعدة السلسلة

➢ إذا كانت ص = د(ع) ، ع = د(س) فإن $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$

تطبيقات هندسية:

➢ إذا كانت ص = د(س) فإن ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه = $\frac{ء ص}{ء س}$.

إذا كانت (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة على منحنى الدالة ص = د(س)، فإن معادلة المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) تعطى بالعلاقة ص - ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$).

حيث م = $(\frac{ء ص}{ء س})$ ميل المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$).

➢ معادلة العمودى على المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) تعطى بالعلاقة ص - ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س - س$_{١}$)

حيث م = $(\frac{ء ص}{ء س})$ ميل المنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) .

المشتقة العكسية للدالة:

➢ يقال: إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت تَ(س) = د(س) لكل س فى مجال د.

➢ إذا كان تَ(س) = د(س) فإن $\int$ د(س) ء س = ت (س) + ث حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل)

خواص التكامل:

إذا كان د، ر دالة قابلة للاشتقاق على فترة ما فإن:

١- $\int$ ا د(س) ء س = ا $\int$ د(س) ء س حيث ا ثابت ≠ ٠

٢- $\int$[د(س) ± ر(س)] ء س = $\int$ د(س) ءس ± $\int$ ر(س) ء س

صيغ قياسية للتكامل:

➢ $\int$ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث

ج $\int$ (اس + ب)^{ن} ءس = $\frac{(اس+ب)^{ن+١}}{ا\ (ن+١)}$ + ث حيث ن ≠ - ١

د $\int$ [د(س)]^{ن} دَ(س) ءس = $\frac{[د(س)]^{ن+١}}{(ن+١)}$ + ث حيث ن ≠ - ١

هـ $\int$ جا س ءس = - جتا س + ث

و $\int$ جتا س ءس = جا س + ث

ز $\int$ قا^{٢} س ءس = ظا س + ث

تمـــارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\frac{د}{د س}$ (حتا^{٢} س + جا^{٢} س) =

أ ١ ب ٠ ج س د ٢(حتاس + جا س)

(٢) إذا كانت د(س) = $\sqrt{٨ س^{٢} + ٩}$ فإن د′(- ٤) =

أ $\frac{-٤}{٥}$ ب ٥ ج $\frac{١}{١٠}$ د $\frac{١}{١٠}$

(٣) $\int$ (س^{٢} - ٣) د س =

أ ٢س ب س^{٣} - ٣س ج $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س + ث د ٢س - ٣ + ث

(٤) نهـا $_{س \to ا}$ $\frac{جا س - جا ا}{س - ا}$ =

أ جتا س ب ١ ج جتا ا د جا (س - ا)

(٥) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س - ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى

أ ١ ب $\frac{١}{١٢}$ ج ٥ د ١٠

(٦) $\frac{د}{د س}$ (٢ - ٣س)$^{-٢}$

أ ١٢ س$^{-٢}$ - ٢٧ س$^{-٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ (٢ - ٣س)$^{-١}$ ج ٦ (٢ - ٣س)$^{-٣}$ د - ٢ (٢ - ٣س)$^{-٣}$

(٧) $\int \frac{د}{د س}$ [د(س)] د س = ...

أ د(س) ب د(س) + ث ج $\frac{د}{د س}$ (د(س)) د $\int$ د(س) د س

(٨) ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & \text{عندما س} < ٢ \\ ٤س & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

ب د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما س} \geq ١ \\ ٢س & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٩) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل ممايأتى:

أ ص = س^{٥} - ٢ $\sqrt{س^{٣}}$ ب ص = (٤س^{٢} + ١) (١ - ٤س^{٢})

ج ص = $\sqrt[٣]{(٢س + ١)^{٥}}$ د ص = (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢)^{٥}

(١٠) إذا كانت ص = س جا س - ٣ جتا س فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

(١١) إذا كان ص = (ع -١)^{٥} ، ع = س^{٢} + ٣ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

(١٢) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = (س - ٣)^{٢} - ١ والتي عندها المماس يوازي المستقيم ٢س + ص - ٣ = ٠

(١٣) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أس + ب يساوى -١ عند النقطة (٢، -٢) أوجد قيمة كل من أ ،ب .

أوجد معادلة المماس لمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

(١٤) ص = $\sqrt{س}$ + $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ عند النقطة (٤، ٤)

(١٥) ص = (س^{٢} + س) (س^{٣} + ٥) عند النقطة (-٢، -٦)

(١٦) ص = $\frac{١ + جا س}{١ - جا س}$ عند النقطة (π ، ١)

أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

(١٧) ص = $(\frac{س + ٢}{س - ٢})$ عند النقطة (٣، ٥)

(١٨) ص = ظا س عند النقطة $(\frac{\pi}{٤}، ١)$

أوجد التكاملات الآتية:

(١٩) $\int$ (س^{٢} - ٣س - ١) د س

(٢٠) $\int (\frac{\sqrt{س}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{س}})$ د س

(٢١) $\int$ (٤ - ٣س)^{٧} د س

(٢٢) $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} د س

(٢٣) $\int$ (جتا س - جا س)(جا س + جتا س)^{٩} د س

(٢٤) $\int \frac{س + ٢}{(٣ + س)^{٥}}$ د س

(٢٥) أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ (س^{٣} + $\sqrt{س}$) د س

ب) $\int$ (س^{٢} + ١)^{٢} د س

جـ) $\int$ س^{٢} (س^{٢} - ٣) د س

د) $\int$ ٣(٣ س +١)^{٣} د س

هـ) $\int$ ٢س (س^{٢} - ٤)^{٣} د س

و) $\int \frac{س^{٢} + ١}{(س^{٣} + ٣س)^{٢}}$ د س

ز) $\int$ (جتا ٢س - س) د س

ح) $\int$ (س^{٢} - ٣س + ١)^{٣} (٤س - ٦) د س

اختبار تراكمي

أكمل مما يأتي:

(١) $\frac{د}{د س}$ (س جتا س) = ...

(٢) $\int$ (٣س^{٢} - ٤س + ٥) د س = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٣) $\frac{د}{د س}$ (ظا $\frac{\pi}{٤}$) = ...

أ ١ ب قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ ج ٠ د ٢

(٤) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جا س جتا س يساوى

أ جتا س جا س ب حتا^{٢} س - جا^{٢}س ج جا س - جتا س د حا^{٢}س + جتا^{٢}س

(٥) الدالة ص = |س - ٢| عند س = ٢

أ متصلة وقابلة للاشتقاق ب متصلة وغير قابلة للاشتقاق

ج غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق د غير متصلة.

(٦) $\int$ ٤(س - ٢)^{٣} د س = ...

أ س^{٤} - ٣٢س + ث ب ٤ (س - ٢)^{٤} + ث ج (س - ٢)^{٤} + ث د $\frac{(س - ٢)^{٤}}{٤}$ + ث

(٧) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي:

أ ص = ع + $\frac{١}{ع}$ ، س ع = ١ ب ص^{٣} = (س^{٢} - ٤س + ٤)$^{-٢}$

ج ص = س ظا ٣س + جتا س د ص = $\frac{س^{٢}}{س^{٢} - ١}$

(٨) أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int$ (س -١)(س +١) د س ب $\int$ (٢ $\sqrt{}$ س - ٦س^{٢}) د س

ج $\int$ (١ + جتا س)^{٢} د س د $\int$ ٤س (٣ - ٢س^{٢})^{٥} د س

(٩) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} - س^{٣} عند النقطة (٢، -٤)

(١٠) إذا كانت ص = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٣}}$ فأثبت أن س^{٤} $\frac{د ص}{د س}$ = ٣

(١١) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أس^{٢} + ب س + ٥ عند النقطة (-١، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فأوجد قيمتى أ ، ب.

الوحدة
الرابعة

حساب المثلثات
Trigonometry



مقدمة الوحدة

عاش محمد بن جابر بن سنان أبو عبدالله البتانى ما بين (٢٣٥ - ٣١٧هـ) الموافق (٨٥٠ - ٩٢٩م) وكان من مشاهير الفلكيين والرياضيين، وقد اهتم اهتمامًا كبيرًا بعلم حساب المثلثات وفصله كعلم مستقل عن علم الفلك، وهو أول من أدخل علم الجبر على حساب المثلثات، كما ألف جداول لجيب التمام (جتا) وجيب الزاوية (جا) وظل تمام الزاوية (ظتا)، وظل الزاوية (ظا) من صفر إلى تسعين درجة، وهذه الجداول لا تزال تستخدم حتى الآن مع تعديلات قليلة، كما طور كثيرًا من المتطابقات المثلثية، وقد درس محمد بن يحيا بن إسماعيل بن العباس أبو الوفا البوزجانى (٣٢٨ - ٣٨٨ هـ) الموافق (٩٤٠ - ٩٩٨م) مؤلفات البتانى فى علم حساب المثلثات دراسة جيدة؛ وأوضح النقاط الغامضة منها وقد ابتكر مقلوب جيب التمام (قا)، ومقلوب الجيب (قتا)، كما ألف جداول لكل من جا، ظا لكل عشر دقائق وله متطابقات مثلثية معروفة باسمه مثل:

جا $\frac{أ}{٢}$ = ٢جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$ ، ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ ، قا^{٢} أ = ١ + ظا^{٢}أ ، قتا أ = ١ + ظتا^{٢}أ وغيرها.

وتتناول هذه الوحدة دراسة تطبيقات حياتية تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق عملى على قاعدتى الجيب وجيب التمام ، وكذلك دراسة المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع وفرق زاويتين وضعف الزاوية وفى نهاية هذه الوحدة يتعرف الطالب على صيغة هيرون لحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه ويحل تطبيقات حياتية عليها.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يحل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض والاتجاهات.
- يستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- يتعرف ويستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بضعف الزاوية ونصف الزاوية.
- يستنتج صيغة هيرون(*Herons Formula*) ويستخدمها في إيجاد مساحة المثلث ويحل تطبيقات عليها.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل مسائل على المتطابقات المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- زاوية — Angle
- زاوية ارتفاع — Angle of Elevation
- زاوية انخفاض — Angle of Depression
- دالة مثلثية — Trigonometric Function
- دالة الجيب — Sine Function
- دالة جيب التمام — Cosine Function
- الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين — Trigonometric Functions of the sum of Measures of Two Angles
- الدوال المثلثية للفرق بين قياسى زاويتين — Trigonometric Function of the Difference Between the Measures of Two Angles
- الدوال المثلثية لضعف الزاوية — Trigonometric Functions of Double – Angle
- الدوال المثلثية لنصف الزاوية — Trigonometric Functions of Half – an Angle
- صيغة هيرون — Heron Formula

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): زوايا الارتفاع والانخفاض.
(تطبيقات على حل المثلثات)

الدرس (٤ - ٢): الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.

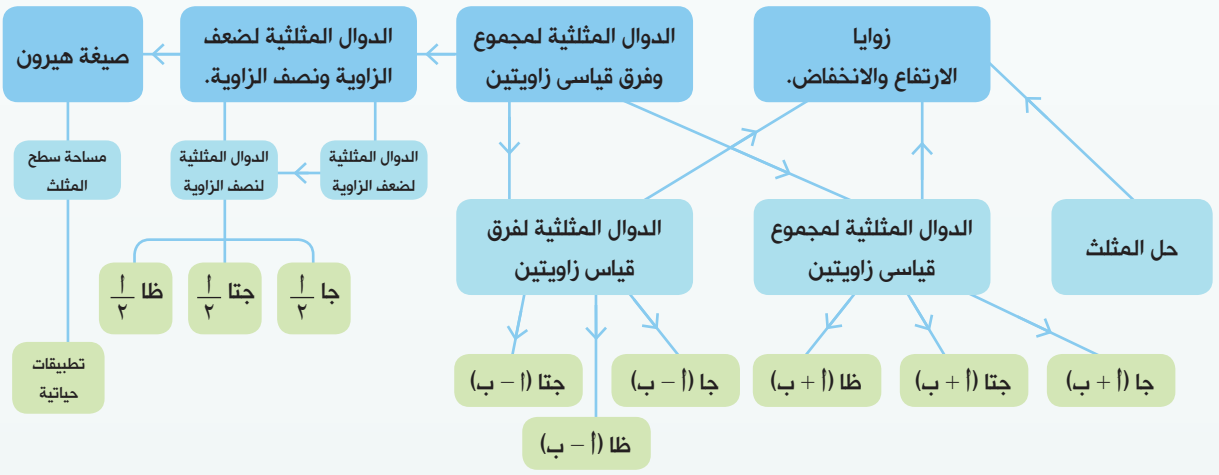
الدرس (٤ - ٣): الدوال المثلثية لضعف الزاوية.

الدرس (٤ - ٤): صيغة هيرون.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

مخطط تنظيمى للوحدة



زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

٤ - ١

Angles of elevation and of depression applications of solving the triangle

سوف تتعلم

- مفهوم زاوية الارتفاع
- مفهوم زاوية الانخفاض.
- حل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.

المصطلحات الأساسية

- زاوية Angle
- زاوية ارتفاع Angle of Elevation
- زاوية انخفاض Angle of Depression

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

نشاط

تعلمت مسبقًا زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث القائم الزاوية، حيث أمكنك إيجاد ارتفاع مئذنة عن سطح الأرض وأنت تبعد عنها مسافة معلومة دون أن تقوم بالقياس الفعلي لطول هذه المئذنة.

والآن بعد دراستك لقانوني (قاعدتي) الجيب وجيب التمام، وحل المثلث بوجه عام باستخدام هذين القانونين، يمكننا دراسة تطبيقات أكثر عمقًا على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض بوجه عام.

- ابحث في مراجع الرياضيات بمكتبتك المدرسية أو باستخدام الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) عن مواقف متنوعة يستخدم في حلها زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث بوجه عام، ثم اكتب قائمة بهذه المواقف، ودون ملاحظاتك على كل منها.

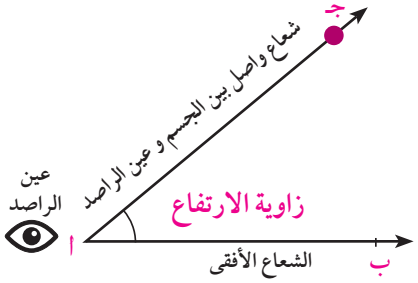
والآن سوف نراجع معك مفهوم زاويتي الارتفاع والانخفاض.

زوايا الارتفاع والانخفاض *angles of elevation and depression*

تعلم

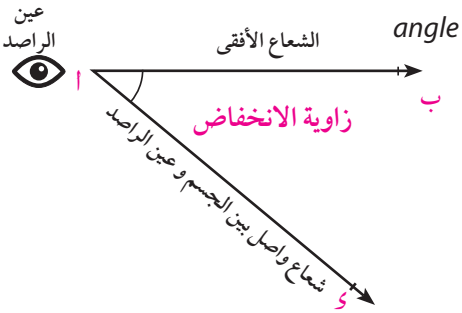
زاوية الارتفاع *angle of elevation*

إذا رصد شخص أ نقطة جـ أعلى من مستوى نظره الأفقي $\overleftarrow{أب}$ ،فإن الزاوية بين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ تسمى زاوية ارتفاع جـ عن المستوى الأفقي لنظر الشخص أ.



زاوية الانخفاض *angle of depression*

إذا رصد شخص أ نقطة ء أسفل من مستوى نظره الأفقي $\overleftarrow{أب}$ فإن الزاوية بين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أء}$ تسمى زاوية انخفاض ء عن المستوى الأفقي لنظر الشخص أ.

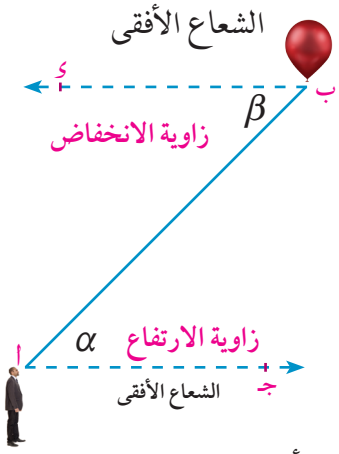


ملاحظات:

١- في الشكل المقابل:

∠ جـ أ ب هى زاوية ارتفاع البالون بالنسبة للشخص عند أ.

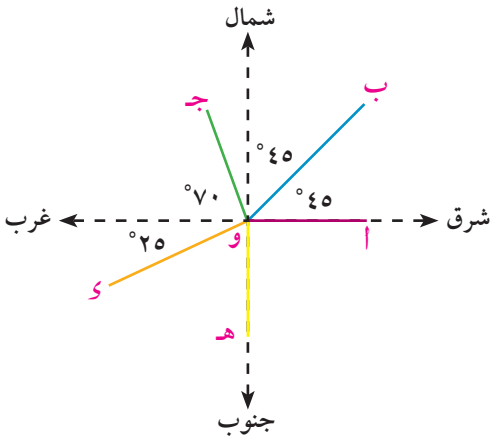
∠ ء ب أ هى زاوية انخفاض الشخص عند أ بالنسبة للبالون.



وفى هذه الحالة يكون $\alpha = \beta$

حيث α هى قياس زاوية الارتفاع، β هى قياس زاوية الانخفاض.

٢- لتحديد نقطة ما بالنسبة للجهات الأصلية من نقطة معلومة نجد من الشكل التالى أن:



أ تقع شرق و

ب تقع شمال شرق و

جـ تقع فى اتجاه ٧٠° شمال غرب و

ء تقع فى اتجاه ٢٥° جنوب غرب و

هـ تقع جنوب و

مثال

(١) من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم سار الراصد فى خط مستقيم مسافة ٥٧ مترًا فى المستوى الأفقى نحو قاعدة البرج، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٥٢°٣٠′. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

تذكر أن

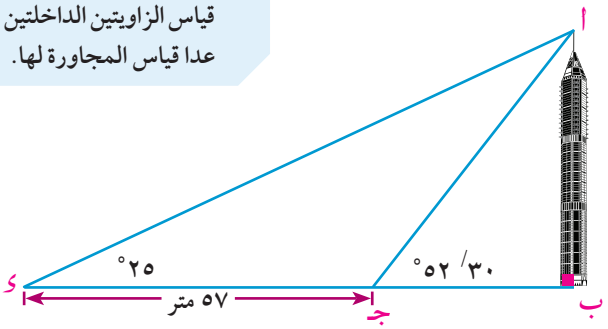
- قانون (قاعدة) الجيب: تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- قياس أى زاوية خارجة للمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها.

الحل

من الشكل المقابل:

و (∠ حـ أ ء) = ٥٢°٣٠′ - ٢٥°

= ٢٧°٣٠′



فى Δ أ جـ ء:

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٢٥°}} = \frac{٥٧^\circ}{\text{جا ٢٧°٣٠′}}$$

$$\therefore \text{أ جـ} = \frac{٥٧ \times \text{جا ٢٥°}}{\text{جا ٢٧°٣٠′}} \quad (١)$$

فى Δ أ ب جـ:

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٥٢°٣٠′}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠°}}$$

∴ أ ب = أ جـ × جا ٥٢٫٣٠° (٢)



بالتعويض من (١) فى (٢) يكون:

$$أ ب = \frac{٥٧ \times جا ٢٥°}{جا ٢٧٫٣٠°} \times جا ٥٢٫٣٠°$$

أ ب ≃ ٤١ متر ، أى أن ارتفاع البرج هو ٤١ متر تقريبًا.

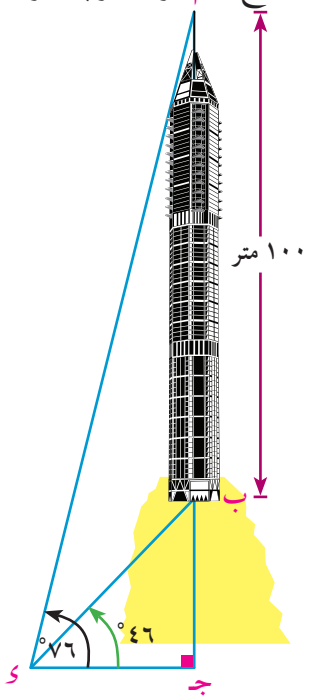
إبدأ ← 5 7 × sin 2 5) × sin 5 2 ,,, 3 0 ,,,) ÷ sin 2 7 ,,, 3 0 ,,, =

حاول أن تحل

(١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٠° ، ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢°. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

مثال

(٢) برج ارتفاعه ١٠٠ متر مقام على صخرة، من نقطة على سطح الأرض فى المستوى الأفقى المار بقاعدة الصخرة قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدتا ٧٦° ، ٤٦° على الترتيب، أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر.



الحل

و (∠ أ ى ب) = ٧٦° - ٤٦° = ٣٠°

و (∠ أ) = ٩٠° - ٧٦° = ١٤°

فى المثلث أ ب ى: $\frac{ب ى}{جا ١٤°} = \frac{١٠٠}{جا ٣٠°}$

$ب ى = \frac{١٠٠ جا ١٤°}{جا ٣٠°}$ (١)

فى المثلث ب جـ ى: $\frac{ب جـ}{جا ٤٦°} = \frac{ب ى}{جا ٩٠°}$

ب جـ = ب ى جا ٤٦° (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج أن

$ب جـ = \frac{١٠٠ جا ١٤°}{جا ٣٠°} \times جا ٤٦° \simeq ٣٥$ متر

استخدم الآلة الحاسبة بالترتيب التالي:

إبدأ ← 1 0 0 × sin 1 4) × sin 4 6) ÷ sin 3 0) =

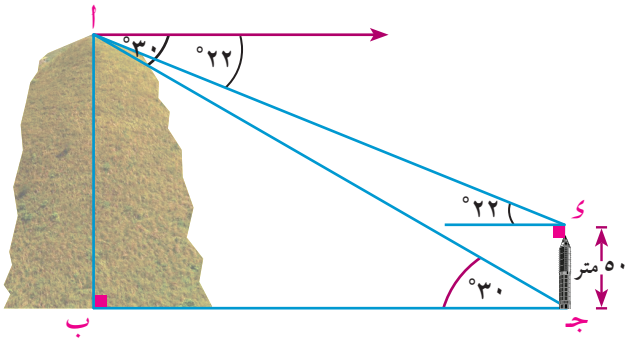
حاول أن تحل

(٢) برج ارتفاعه ١٢ مترًا مقامًا فوق تل، فإذا كان قياسا زاويتى ارتفاع قمة البرج وقاعدته من نقطة على سطح الأرض هما ٣٢° ، ٢٤° على الترتيب. أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

مثال

(٣) من قمة تل رصد رجل قياس زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته فكانت ٢٢° ، ٣٠° على الترتيب ، فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا ، فأوجد ارتفاع التل لأقرب متر. علمًا بأن قاعدتى التل والبرج فى مستوى أفقى واحد.

الحل



من الشكل المقابل:

و (∠ ى أ جـ) = ٣٠° - ٢٢° = ٨°

و (∠ جـ ى أ) = ٩٠° + ٢٢° = ١١٢°

فى المثلث أ جـ ى $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ١١٢°}} = \frac{٥٠}{\text{جا ٨°}}$

أ جـ = $\frac{٥٠ \text{ جا ١١٢°}}{\text{جا ٨°}}$ (١)

فى المثلث أ جـ ب

$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠°}}$ ∴ أ ب = أ جـ جا ٣٠° (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج أن:

أ ب = $\frac{٥٠ \text{ جا ١١٢°} \times \text{جا ٣٠°}}{\text{جا ٨°}} \simeq$ ١٦٧ متر.

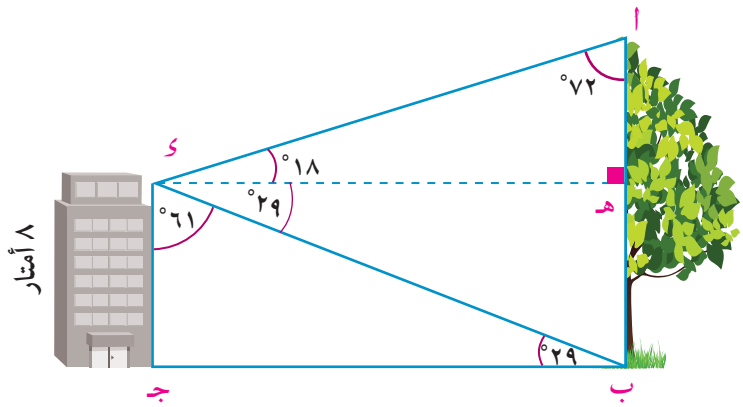
إبدأ → 5 0 × sin 1 1 2) × sin 3 0) ÷ sin 8) =

حاول أن تحل

(٣) من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا ، قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة ببرج فوجدتا ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر، علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

مثال

(٤) من قمة منزل ارتفاعه ٨ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ١٨° ، قياس زاوية انخفاض قاعدتها ٢٩° أوجد المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة، وكذلك أوجد ارتفاع الشجرة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد ، مقربًا لرقمين عشريين.



الحل

و (∠ أ) = ٩٠° - ١٨° = ٧٢°

و (∠ ب ى جـ) = ٩٠° - ٢٩° = ٦١°

فى Δ ب جـ ى: ∵ $\frac{٨}{\text{جا ٢٩°}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٦١°}}$

∴ ب جـ = $\frac{٨ \times \text{جا } ٦١^\circ}{\text{جا } ٢٩^\circ}$ ≃ ١٤,٤٣ متر

المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة ≃ ١٤,٤٣ متر

فى △ أ هـ ء:

∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ١٨^\circ} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{جا } ٧٢^\circ}$ لاحظ أن (هـ ء = ب جـ)

∴ أ هـ = $\frac{\text{جا } ١٨^\circ}{\text{جا } ٧٢^\circ} \times$ ب جـ ∴ أ هـ = $\frac{\text{جا } ١٨^\circ}{\text{جا } ٧٢^\circ} \times$ ١٤,٤٣ ≃ ٤,٦٩ متر

∴ ارتفاع الشجرة ≃ ٨ + ٤,٦٩ ≃ ١٢,٦٩ متر

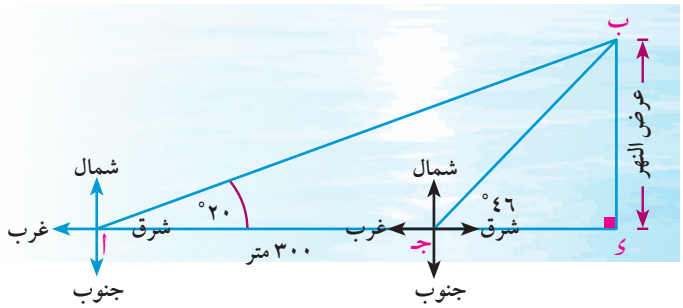
حاول أن تحل

(٤) يقف رجلان على أرض أفقية، رصدا فى نفس اللحظة بالون طائر، فوجد الأول أن قياس زاوية ارتفاعه ٦٣°، ووجد الثانى أن قياس زاوية ارتفاعه ٣٩°، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٨٠٠ متر، والبالون والرجلان فى مستوى رأسى واحد، ومسقط البالون يقع بين الرجلين، فأوجد ارتفاع البالون عن سطح الأرض لأقرب متر.

مثال

(٥) من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ فى اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة جـ ، وجد أن نقطة ب فى اتجاه ٤٦° شمال الشرق. أوجد عرض النهر لأقرب متر علمًا بأن ضفتى النهر متوازيتان وأن النقط أ ، ب ، جـ فى مستوى أفقى واحد.

الحل



نفرض أن عرض النهر هو $\overline{\text{ب ء}}$

فى المثلث أ ب جـ

و (∠ أ ب جـ) = ٤٦° - ٢٠° = ٢٦°

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٢٠^\circ} = \frac{٣٠٠}{\text{جا } ٢٦^\circ}$

ب جـ = $\frac{٣٠٠ \text{ جا } ٢٠^\circ}{\text{جا } ٢٦^\circ}$ (١)

فى المثلث ب ء جـ

∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٤٦^\circ} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ ∴ ب ء = ب جـ × جا ٤٦° ∴ ب ء = $\frac{٣٠٠ \times \text{جا } ٢٠^\circ}{\text{جا } ٢٦^\circ} \times$ جا ٤٦° ≃ ١٦٨ متر

إبدأ → 3 0 0 × sin 2 0) × sin 4 6) ÷ sin 2 6) =

حاول أن تحل

(٥) من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل شجرة عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر، فوجد أن ب فى اتجاه ٣٧° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ نحو الغرب مسافة ٢٠٠ متر، حتى وصل إلى نقطة جـ فوجد أن نقطة ب فى اتجاه ١٥° شمال الشرق، أوجد عرض النهر لأقرب متر.

مثال

٦ من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل، رصد رجل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٧° ، ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠٠ متر على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٤° ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٣٨°. أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

الحل

فى المثلث أ جـ ء

و (∠ أ جـ ء) = ٢٧° - ١٤° = ١٣°

∵ زاوية أ هـ ب خارجة عن المثلث أ هـ جـ

∴ و (∠ هـ أ جـ) = ٣٨° - ٢٧° = ١١°

∴ و (∠ أ ء جـ) = ١٨٠° - (١١° + ١٣°) = ١٥٦°

فى المثلث أ ء جـ

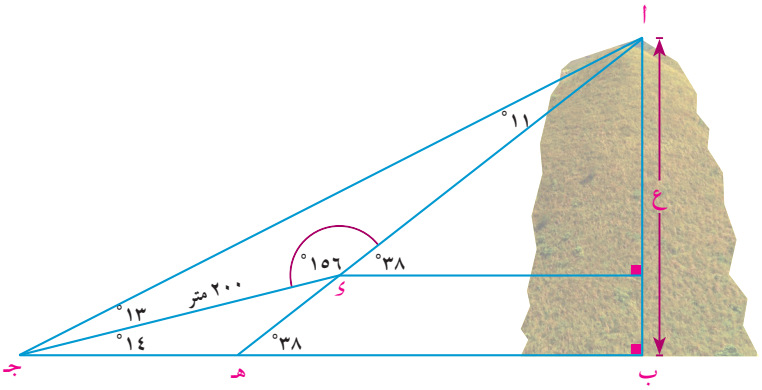
∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ١٥٦°}} = \frac{٢٠٠}{\text{جا ١١°}}$

∴ أ جـ = $\frac{٢٠٠ \times \text{جا ١٥٦°}}{\text{جا ١١°}}$ (١)

فى المثلث أ ب جـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٢٧°}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠°}}$

∴ أ ب = أ جـ جا ٢٧° (٢)



تذكر أن

قياس الزاوية الخارجة فى المثلث تساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

بالتعويض من (١) فى (٢) يكون:

أ ب = $\frac{٢٠٠ \times \text{جا ١٥٦°}}{\text{جا ١١°}} \times \text{جا ٢٧°} \simeq$ ١٩٤ متر.

حاول أن تحل

٦ قام شخص بقياس زاوية ارتفاع قمة تل من نقطة على سطح الأرض فوجدها ٢٢°، ولما صعد نحو التل مسافة ٥٠٠ متر على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٧° ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٦٤° ، أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

مثال

٧ **الملاحة البحرية:** تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٢٥´ ٦٨° غرب الجنوب بسرعة مقدارها ١٥ كم / ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٤٨´ ٥٣° شمال الغرب بسرعة ٨ كم / ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ٣ ساعات مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

الحل

∵ السرعة المنتظمة = المسافة المقطوعة / الزمن الذى قطعت فيه المسافة

المسافة المقطوعة = السرعة المنتظمة × الزمن الذى قطعت فيه المسافة

∴ أ ب = ١٥ × ٣ = ٤٥ كم

، أ جـ = ٨ × ٣ = ٢٤ كم

∴ ق (∠ ب أ ى) = ٩٠° - ٦٨′٢٥° = ٢١′٣٥°

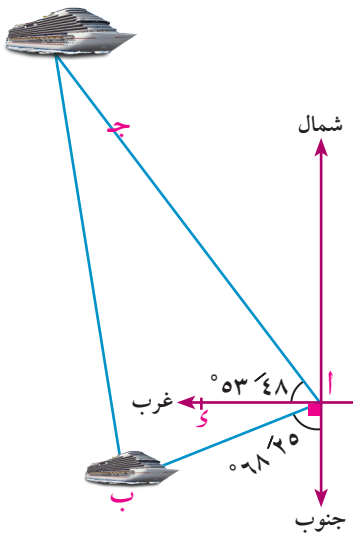
∴ ق (∠ ب أ جـ) = ٢١′٣٥° + ٥٣′٤٨° = ٧٥′٢٣°

فى المثلث أ ب جـ

بتطبيق قاعدة جيب التمام

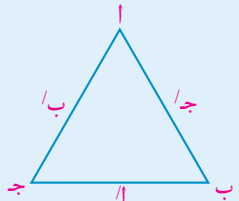
(ب جـ)^{٢} = (٤٥)^{٢} + (٢٤)^{٢} - ٢ × ٤٥ × ٢٤ جتا ٧٥′٢٣°

∴ ب جـ ≃ ٤٥,٣٤ كم



تذكر أن

قاعدة جيب التمام



أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ جتا أ

ومنه جتا أ = (ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}) / ٢ ب جـ

وهكذا بالنسبة لأطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الأخرى.

إبدأ ← 4 5 χ^2 + 2 4 χ^2 - 2 × 4 5 × 2 4 × Cos 7 5 ,,, 2 3 ,,,) = $\sqrt{}$ Ans =

حاول أن تحل

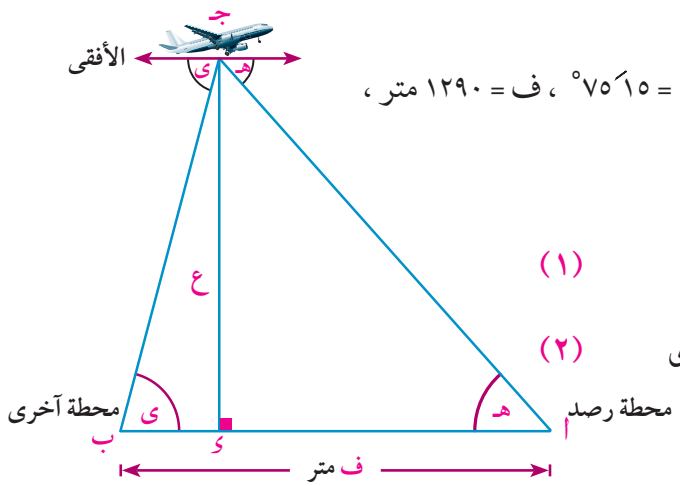
(٧) **الملاحة البحرية:** تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٧٠° شرق الجنوب بسرعة مقدارها ١٢ كم / ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق بسرعة ٥ كم / ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

مثال

(٨) **(البرهنة النظرية):** رصد طيار محطتين للرصد أ ، ب على أرض أفقية، حيث أ ب = ف مترًا، فوجد أن قياس زاويتى انخفاضهما هـ ، ى على الترتيب، إذا كانت الطائرة والمحطتان فى مستوى رأسى واحد، وارتفاع الطائرة عندئذ عن الأرض يساوى ع مترًا والمسقط الرأسى للطائرة ∈ $\overline{أ ب}$. أثبت أن:

ع = ف / (ظتا هـ + ظتا ى)

وإذا كان ق (∠ هـ) = ٤٨′٣١° ، ق (∠ ى) = ٧٥′١٥° ، ف = ١٢٩٠ متر ، أوجد قيمة ع.



الحل

∵ ظتا هـ = أ ء / ع ∴ أ ء = ع ظتا هـ (١)

∵ ظتا ى = ب ء / ع ∴ ب ء = ع ظتا ى (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ أ ء + ب ء = ع ظتا هـ + ع ظتا ى = ع (ظتا هـ + ظتا ى)

∴ ف = ع (ظتا هـ + ظتا ى)

أى أن ع = $\frac{\text{ف}}{\text{ظتا هـ + ظتا ى}}$

عندما ق (∠ هـ) = ٤٨′٣١° ، ق (∠ ى) = ٧٥′١٥° ، ف = ١٢٩٠ متر

∴ ع = $\frac{١٢٩٠}{\text{ظتا ٤٨′٣١° + ظتا ٧٥′١٥°}}$ ≃ ١١٢٤,٢ متر

1 2 9 0 ÷ (1 ÷ tan 4 8 ‴ 3 1 ‴) + 1 ÷

tan 7 5 ‴ 1 5 ‴)) =

حاول أن تحل

(٨) **البرهنة النظرية:** يرتكز سلم طوله ل مترًا بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية ويميل السلم على الأفقى بزاوية قياسها ى، تحرك الطرف الأسفل للسلم مسافة ف مترًا بعيدًا عن الحائط، وأصبح السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ ، أثبت أن ل = $\frac{\text{ف}}{\text{جتا هـ - جتا ى}}$

وإذا كان ف = ٤٠سم ، ق (∠ هـ) = ٣٠° ، ق (∠ ى) = ٤٠° ، فأوجد طول السلم.

تمـــاريـن (٤ - ١)

(١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٠′٣٥° ، ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢° . أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

(٢) من قمة منزل ارتفاعه ١٥ مترًا كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٦٧° ، قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٥° ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر، علمًا بأن قاعدة البرج وقاعدة المنزل فى مستوى أفقى واحد.

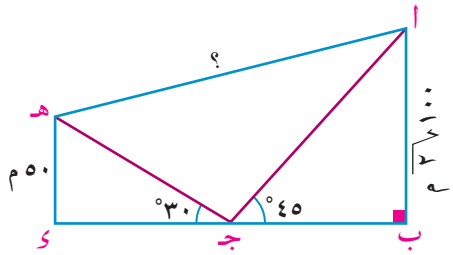
(٣) من قمة برج ارتفاعه ٦٥ مترًا قيست زاويتى انخفاض النقطتين أ ، ب على المستوى الأفقى فكانتا ٣٢° ، ٢١′١٢° على الترتيب، فإذا كانت ء تمثل قاعدة البرج ، أ ∋ ب ء ، أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ لأقرب متر.

(٤) من قمة التل وجد راصد أن قياس زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته هما ١٥° ، ٢٦° على الترتيب، فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا، فاحسب ارتفاع التل لأقرب متر، علمًا بأن قاعدتى التل والبرج فى مستوى أفقى واحد

(٥) رصدت سفينة فى عرض البحر منارة فوجد أنها تقع على بعد ٥٠ كم نحو الشرق ثم تحركت السفينة فى اتجاه شمال الشرق وبعد ساعتين وجدت أن المنارة أصبحت تقع فى اتجاه ٥٠° ، جنوب الشرق لها. احسب سرعة السفينة.

(٦) منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ البحر، قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجدتا ٧٠° ، ٤٥° على الترتيب. أوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر.

(٧) **فى الشكل المقابل**: بالونان أ ، هـ ارتفاعهما ١٠٠ √٢ ، ٥٠ مترا. رصد جسم على الأرض (جـ) يقع فى المستوى الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتى انخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب. أوجد البعد بين البالونين مقربًا لأقرب متر.



(٨) من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا، قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فوجدتا ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر، علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

(٩) من قمة منزل رصد شخص سيارة ساكنة على نفس المستوى الأفقى المقام عليه المنزل فوجد أن قياس زاوية انخفاضها ٧٠°، وعندما هبط الشخص رأسيًّا لأسفل مسافة ١٢ مترًا، وجد أن قياس زاوية انخفاض السيارة أصبحت ٣٠°، أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر، والمسافة بين المنزل والسيارة.

(١٠) ثلاث قرى أ ، ب ، جـ تقع القرية أ غرب القرية ب حيث أ ب = ٢٠ كم وتقع القرية جـ فى اتجاه ٤٨° شرق الشمال من القرية أ ، ٦٠° شمال الغرب من القرية ب. أوجد المسافة بين القريتين ب ، جـ لأقرب كيلومتر.

(١١) من نقطة ما على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة تساوى ٥٠° ، ومن نقطة أخرى على ارتفاع ٤٥ مترًا من النقطة السابقة وفوقها تماماً، وجد أن قياس زاوية انخفاض قمة الشجرة تساوى ٣٠° ، أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب متر.

(١٢) من قمة جبل ارتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر، رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة، فوجد أن قياسها ٣٧ ٤٢′° ، أوجد ارتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا، علمًا بأنهما مقامين على أرض أفقية واحدة.

(١٣) تحرك شخصان من نفس النقطة، وفى نفس الوقت الأول فى اتجاه ٤٠° غرب الشمال بسرعة ٣٢ مترًا / دقيقة، والثانى فى اتجاه ٧٠° جنوب الغرب بسرعة ٣٨ متر / دقيقة، أوجد لأقرب متر المسافة بينهما بعد ٥ دقائق.

(١٤) رصد رجل من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٤° ، ولما صعد نحو التل مسافة ٤٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٥° ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٣٦° ، أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

(١٥) رُصدت طائرة جـ من المحطتين أ ، ب عند لحظة مرورها بالمستوى الرأسى المار بالمستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، حيث أ ب = ٣٠٠٠ متر، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها من أ هو ٥٣′٢١° ، وقياس زاوية ارتفاعها من ب هو ٣٤′٢٦° ، والمسقط الرأسى للطائرة ∈ $\overline{أ ب}$. أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر.

(١٦) **الملاحة البحرية**: تسير سفينة نحو الشمال الشرقى بسرعة منتظمة مقدارها ٢٨ كم / ساعة، شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى اتجاه ٣٧° غرب الشمال، وبعد ٣ ساعات، وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت فى اتجاه ٢٤° جنوب الغرب بالنسبة له، والأخرى فى اتجاه ١٩° شمال الغرب بالنسبة له، أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر، علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد.

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

٤ - ٢

Trigonometric functions of sum and difference of the measures of two angles

سوف تتعلم

- استنتاج الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسي زاويتين.
- حل تطبيقات متنوعة على الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.
- استخدم متتطابقات المجموع والفرق فى إثبات صحة بعض المتطابقات الأخرى.

المصطلحات الأساسية

- دالة مثلثية
 Trigonometric functions
- دالة جيب Sine function
- دالة جيب التمام Cosine function
- دالة ظل Tangent function
- الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين
 Trigonometric functions of sum of the measures of two angles
- الدوال المثلثية فرق قياس زاويتين
 Trigonometric functions of difference of the measures of two angles

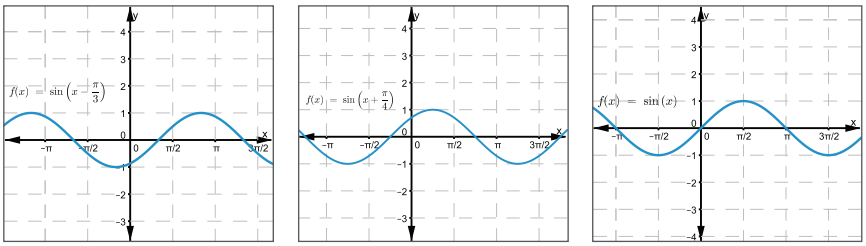
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
 Scientific calculator

فكر و ناقش

استخدم برنامج جيوجبرا (geo-gebra) فى رسم الدوال الآتية:

د(س) = جاس ، ص = جا (س + $\frac{\pi}{٤}$) ، م (س) = جا (س - $\frac{\pi}{٣}$)



من خلال دراستك لمفهوم التحويلات الهندسية - ماذا تلاحظ؟

لاحظ أن الدالة الثانية الموضحة بالشكل الثاني تتضمن جمع الزاويتين س ، $\frac{\pi}{٤}$ والدالة الثالثة الموضحة بالشكل الثالث تتضمن طرح الزاويتين س ، $\frac{\pi}{٣}$.

لذلك كان من الضرورى استخدام قوانين النسب المثلثية لمجموع زاويتين أو فرق زاويتين، وذلك لإيجاد الدوال المثلثية لزاوية محددة، فمثلًا لإيجاد قيمة جا ٧٥° يمكننا وضعها بالصورة جا (٣٠° + ٤٥°) ، كذلك جتا ١٥° يمكن وضعها على الصورة جتا (٦٠° - ٤٥°)، أو جتا (٤٥° - ٣٠°) وهكذا....

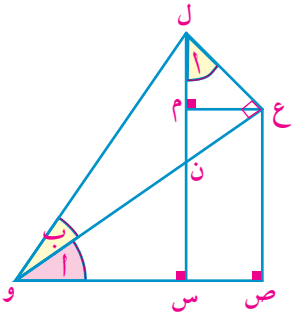
تعلم

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين:

Trigonometric functions of sum and difference of the measures of two angles

من الشكل المقابل: (البرهان لايمتحن فيه الطالب)

لاحظ أن ق(∠أ) = ق (∠ع ل م) لماذا؟



(لاحظ أن: ع ص = م س – لماذا؟)

جا (أ + ب) = $\frac{\text{ل س}}{\text{ل و}}$ = $\frac{\text{ل م}}{\text{ل و}} + \frac{\text{م س}}{\text{ل و}}$

= $\frac{\text{ل م}}{\text{ل و}} + \frac{\text{ع ص}}{\text{ل و}}$

= $\frac{\text{ع ص}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ل م}}{\text{ل ع}} + \frac{\text{ع و}}{\text{ع و}} \times \frac{\text{ل ع}}{\text{ل و}}$

= $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع و}} \times \frac{\text{ل م}}{\text{ل ع}} + \frac{\text{ع و}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ل ع}}{\text{ل و}}$

= جا أ × جتا ب + جتا أ × جا ب

فيكون $\boxed{\text{جا}(أ + ب) = \text{جا}أ \text{ جتا } ب + \text{جتا } أ \text{ جا } ب}$

وبوضع (- ب) بدلًا من ب ينتج أن:

$\text{جا}[أ + (-ب)] = \text{جا}أ \text{ جتا}(-ب) + \text{جتا}أ \text{ جا}(-ب)$

$\boxed{\text{جا}(أ - ب) = \text{جا}أ \text{ جتا } ب - \text{جتا}أ \text{ جا } ب}$

تذكر أن

$\text{جا}(-أ) = -\text{جا}أ$

$\text{جتا}(-أ) = \text{جتا}أ$

$\text{ظا}(-أ) = -\text{ظا}أ$

استخدم نفس الشكل لأثبات:

$\boxed{\text{جتا}(أ + ب) = \text{جتا}أ \text{ جتا } ب - \text{جا}أ \text{ جا } ب}$

ثم استنتج أن: $\boxed{\text{جتا}(أ - ب) = \text{جتا}أ \text{ جتا } ب + \text{جا}أ \text{ جا } ب}$

مثال

(١) أوجد:

(أ) جا ٧٥° (ب) جتا ١٥° ماذا تلاحظ؟

الحل

(أ) $\text{جا } ٧٥° = \text{جا}(٣٠° + ٤٥°) = \text{جا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° + \text{جتا } ٣٠° \text{ جا } ٤٥°$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١ + \sqrt{٣}}{\sqrt{٢}\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤}$

(ب) $\text{جتا } ١٥° = \text{جتا}(٤٥° - ٣٠°) = \text{جتا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° + \text{جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١ + \sqrt{٣}}{\sqrt{٢}\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤}$

نلاحظ أن: $\text{جا } ٧٥° = \text{جتا } ١٥°$

حاول أن تحل

(١) أوجد.

(أ) جتا ١٠٥° (ب) جا ٧٥° جتا ١٥° + جتا ٧٥° جا ١٥°

(جـ) جتا ٨٠° جتا ٢٠° + جا ٨٠° جا ٢٠°

تذكر أن

$\text{جا}(١٨٠ - أ) = \text{جا}أ$

$\text{جتا}(١٨٠ - أ) = -\text{جتا}أ$

$\text{جا}(١٨٠ + أ) = -\text{جا}أ$

$\text{جتا}(١٨٠ - أ) = -\text{جتا}أ$

مثال

(٢) إذا كان $\text{جا}أ = \frac{٣}{٥}$ حيث $٩٠° < أ < ١٨٠°$ ، $\text{جتا } ب = \frac{-٥}{١٣}$

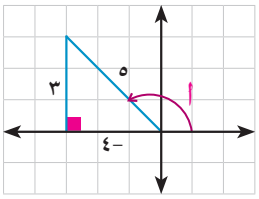
حيث $١٨٠° < ب < ٢٧٠°$

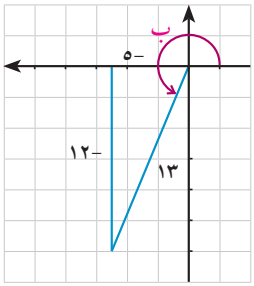
أوجد جتا (أ - ب) ، جا (أ + ب)

الحل

∵ أ ∈ الربع الثانى ∴ جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ∴ حتا أ = $\frac{-٤}{٥}$

∵ ب ∈ الربع الثالث ∴ جا ب = $\frac{-١٢}{١٣}$ ∴ حتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$





فيكون:

جتا(أ - ب) = حتا أ حتا ب + جا أ جا ب

$= (\frac{-٤}{٥})(\frac{-٥}{١٣}) + (\frac{٣}{٥})(\frac{-١٢}{١٣}) = \frac{-١٦}{٦٥}$

جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + حتا أ جا ب

$= (\frac{٣}{٥})(\frac{-٥}{١٣}) + (\frac{-٤}{٥})(\frac{-١٢}{١٣}) = \frac{٣٣}{٦٥}$

حاول أن تحل

(٢) إذا كان حتا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، حتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة.

أ جا(أ + ب) ب قا(أ - ب)

(٣) فى المثلث أ ب جـ ، حتا أ = $\frac{-٣}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، أوجد جا جـ بدون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال

الربط بالكهرباء: إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى بالعلاقة: ت = $\frac{٥}{٢}$ جا ١٦٥° ن

أ أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام مجموع قياسى زاويتين.

ب أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

الحل

ت = $\frac{٥}{٢}$ جا ١٦٥° ن — العلاقة المعطاة

ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (٤٥° ن + ١٢٠° ن) — لأن ١٦٥° = ٤٥° + ١٢٠°

= $\frac{٥}{٢}$ جا (٤٥° + ١٢٠°) — بالتعويض عن ن = ١ ثانية

= $\frac{٥}{٢}$ [جا ٤٥° جتا ١٢٠° + جتا ٤٥° جا ١٢٠°] — استخدام مفكوك مجموع قياسى زاويتين

= $\frac{٥}{٢}$ [$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (-$\frac{١}{٢}$) + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$] — بالتعويض عن قيم النسب المثلثية

= $\frac{٥}{٢}$ × $\frac{١-\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ — بضرب كلاً من البسط والمقام × $\sqrt{٢}$

= $\frac{(\sqrt{٢} - \sqrt{٦})}{٨}$ بالتبسيط

حاول أن تحل

٤ إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى بالعلاقة ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٢٨٥° ن

أ أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسي زاويتين.

ب أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

دالة الظل لمجموع وفرق قياسى زاويتين:

Tangent function of sum and difference of the measures of two angles

$$\text{ظا}(أ + ب) = \frac{\text{جا}(أ+ب)}{\text{جتا}(أ+ب)} = \frac{\text{جا}أ\ \text{جتا}ب + \text{جتا}أ\ \text{جا}ب}{\text{جتا}أ\ \text{جتا}ب - \text{جا}أ\ \text{جا}ب}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب ≠ ٠ يكون:

$$\text{ظا}(أ + ب) = \frac{\text{ظا}أ + \text{ظا}ب}{١ - \text{ظا}أ\ \text{ظا}ب}$$

وعند وضع (-ب) بدلا من ب فإن:

$$\text{ظا}(أ - ب) = \frac{\text{ظا}أ - \text{ظا}ب}{١ + \text{ظا}أ\ \text{ظا}ب}$$

حيث أ، ب ≠ $\frac{\pi}{٢}$ (٢ن + ١)، ن ∈ ص

مثال

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

أ ظا ٥٠° = $\frac{١ + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٥°}$

ب ظا (٤٥° - أ) = $\frac{\text{جتا}أ - \text{جا}أ}{\text{جتا}أ + \text{جا}أ}$

الحل

أ الطرف الأيمن = ظا٥٠°

= ظا(٤٥° + ٥°) = $\frac{\text{ظا}٤٥° + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٤٥°\ \text{ظا}٥°}$ = $\frac{١ + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٥°}$ = الطرف الأيسر

ب الطرف الأيمن = ظا(٤٥° - أ)

= $\frac{\text{ظا}٤٥° - \text{ظا}أ}{١ + \text{ظا}٤٥°\ \text{ظا}أ}$ = $\frac{١ - \text{ظا}أ}{١ + \text{ظا}أ}$

= $\frac{١ - \frac{\text{جا}أ}{\text{جتا}أ}}{١ + \frac{\text{جا}أ}{\text{جتا}أ}}$ × $\frac{\text{جتا}أ}{\text{جتا}أ}$ = $\frac{\text{جتا}أ - \text{جا}أ}{\text{جتا}أ + \text{جا}أ}$ = الطرف الأيسر

لاحظ أن

ظا أ = $\frac{\text{جا}أ}{\text{جتا}أ}$

حاول أن تحل

٥ إذا كان كل من أ، ب قياسى زاويتين حادتين موجبتين، حيث جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$، جا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، أوجد قيمة ظا(أ - ب)

٦ إذا كان أ، ب ، جـ قياسات زوايا مثلث حيث ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ، ظا جـ = ٧ ، أثبت أن أ = ٤٥°

٧ إذا كان ظا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظا ب = $\frac{١}{١١}$ ، فاثبت أن (أ + ب) = ٤٥°

مثال

٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية حيث $0^\circ < س < 360^\circ$

أ ظاس + ظا٢٠° + ظاس ظا ٢٠° = ١ ب جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س

الحل

أ ∵ ظا س + ظا٢٠° + ظاس ظا ٢٠° = ١

∴ ظا س + ظا٢٠° = ١ - ظا س ظا ٢٠°

∴ $\frac{\text{ظاس + ظا ٢٠°}}{\text{١ - ظا س ظا٢٠°}} = ١$ (وذلك بقسمة طرفى المعادلة على: ١ - ظا س ظا ٢٠°)

أى أن: ظا (س + ٢٠°) = ١

∴ س + ٢٠° تقع في الربع الأول

∴ ظا (س + ٢٠°) = ظا ٤٥° س + ٢٠° = ٤٥° س = ٢٥°

أو س + ٢٠° تقع في الربع الثالث

ظا (س + ٢٠°) = ظا ٢٢٥° س + ٢٠° = ٢٢٥° س = ٢٠٥°

مجموعة الحل هى {٢٥°، ٢٠٥°}

ب ∵ جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س

∴ جا س جتا ٣٠° + جتا س جا ٣٠° = ٢ جتا س

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا س + $\frac{١}{٢}$ جتا س = ٢ جتا س

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا س = $\frac{٣}{٢}$ جتا س

بقسمة الطرفين على جتا س ، حيث: جتا س ≠ ٠

∴ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$ أى أن ظا س = $\sqrt{٣}$ > ٠

∴ س تقع فى الربع الأول أو الربع الثالث ويكون

س = ٦٠° أو س = ٦٠° + ١٨٠° = ٢٤٠°

مجموعة الحل هى {٦٠°، ٢٤٠°}

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث $0^\circ < س < 360^\circ$

أ جا س جتا ٢٠° - جتا س جا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ ب جتا ٢ س جتا س + جا ٢ س جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تمـارين (٤ - ٢)

أكمل كل مما يأتي:

(١) حا٤٠° حتا١٠° - حتا٤٠° جا ١٠° = ...

(٢) $\frac{\text{ظا ٧٥° - ظا ١٥°}}{\text{١ + ظا ٧٥° ظا ١٥°}}$ = ...

(٣) حتا٧٠° حتا٢٠° - جا٧٠° جا٢٠° = ...

(٤) جا(س + ص) حتاص - جتا(س + ص) جاص = ...

(٥) إذا كان ظاأ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (أ + ب) = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) جا $(\frac{\pi}{٦} + \theta)$ =

أ $\frac{١}{٢}$ (حتاθ + $\sqrt{٣}$ جاθ)

ب $\frac{١}{٢}$ (حتاθ + حاθ)

جـ $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتاθ + حاθ)

د $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتاθ + $\sqrt{٢}$ جاθ)

(٧) حا٧٥° حتا١٥° + حتا٧٥° جا١٥° تساوي

أ صفر

ب $\frac{١}{٢}$

جـ ١

د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٨) حا٥س جا٣س + حتا٥س حتا٣س تساوي

أ حتا٢س

ب جتا ٨ س

جـ حا٨ س

د حا٢س

(٩) ظا١٥° تساوي

أ ٢ + $\sqrt{٣}$

ب - ٢ - $\sqrt{٣}$

جـ ٢ - $\sqrt{٣}$

د ٢ - $\sqrt{٣}$

(١٠) إذا كان ظاأ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (أ + ب) يساوي

أ ١

ب - $\frac{٥}{٦}$

جـ $\frac{١}{٦}$

د $\frac{٥}{٦}$

(١١) ظتا $(\frac{٥\pi}{١٢} - ٢\pi)$ =

أ ٢ + $\sqrt{٣}$

ب ٢ - $\sqrt{٣}$

جـ - ٢ - $\sqrt{٣}$

د ٢ - $\sqrt{٣}$

ضع فى أبسط صورة:

(١٢) جتا(أ - ب) - جتا(أ + ب)

(١٣) جا(أ + ب) - جا(أ - ب)

(١٤) حتاأ جتا(أ + $\frac{\pi}{٢}$) + جاأ جا(أ + $\frac{\pi}{٢}$)

(١٥) حتا٤٠° حتاس - جا٤٠° جاس

(١٦) إذا علمت أن جاأ = $\frac{-٨}{١٧}$ حيث ١٨٠° < أ < ٢٧٠° ، جتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من:

أ جتا(أ - ب) ب جا(أ + ب) ج ظا(أ - ب)

(١٧) إذا كان ظا(θ + ٤٥°) = $\frac{٣}{٢}$ ، فأوجد قيمة ظاθ.

(١٨) إذا علمت أن $\frac{\text{جتا(أ + ب)}}{\text{جتا(أ - ب)}}$ = $\frac{١}{٣}$ ، فاثبت أن ٢حاأ جاب = حتاأ حتاب

ثم أثبت أن: ٢ظاأ = ظتاب. و إذا علمت أن ظاأ = $\frac{٢}{٥}$ فأوجد ظا ب ، ومن ثم أوجد ظا(أ - ب)

(١٩) إذا كان أ ، ب زاويتان حادتان ، حيث ظاأ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٩}$ ، برهن أن أ + ب = ٤٥°.

(٢٠) إذا كانت حتاأ = ٠,٦ ، حتاب = ٠,٨ ، حيث أ ، ب قياسي زاويتان حادتان،

أوجد بدون استخدام الالة الحاسبة قيمة كل من:

أ جا(أ + ب) ب جتا(أ - ب) ج ظا(أ - ب)

(٢١) إذا كان أ ، ب زاويتين حادتين حيث حتاأ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظاب = $\frac{٨}{١٥}$ ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من:

أ جا(أ + ب) ب ظا(أ - ب) ج قا(أ - ب) د ظتا(أ + ب)

(٢٢) إذا كان جاأ جاب = $\frac{١}{٢}$ ، حتاأ حتاب = $\frac{١}{٣}$ ، حيث أ ، ب قياسي زاويتان حادتان.

أوجد قيمة كل من: جتا(أ + ب) ، جتا(أ - ب)

(٢٣) إذا كان جاأ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٠° < أ < ٩٠° ، ظا ب = - ٧ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠° ، أثبت أن أ + ب = ١٣٥°

(٢٤) إذا كان س + ص + ع = ٩٠° ، أثبت أن ظا س ظا ص + ظا ص ظا ع + ظا ع ظا س = ١

(٢٥) تفكير إبداعى: إذا كان ظاأ = $\frac{٢}{٣}$ حيث π < أ < $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ حيث ٠ < أ < $\frac{\pi}{٢}$ ،

أوجد قيمة كل من ظا(أ + ب) ، جتا(أ + ب) ، ومن ذلك أثبت أن أ + ب = $\frac{٥\pi}{٤}$

٤ - ٣ الدوال المثلثية لضعف الزاوية

The Trigonometric Functions of the Double-Angle

سوف تتعلم

- استنتاج الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
- الدوال المثلثية لنصف الزاوية
- حل تطبيقات متنوعة على الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
- استخدام متطابقات ضعف الزاوية فى إثبات صحة متطابقات أخرى.

المصطلحات الأساسية

- دالة مثلثية. Trigonometic function
- ضعف زاوية double – angle
- نصف الزاوية half – angle
- دالة جيب Sine function
- دالة جيب التمام Cosine function
- دالة ظل Tangent fuction

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فكر و ناقش

سبق أن درست الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين، والآن نطرح سؤالًا:
إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة، فهل يمكنك استنتاج الدوال المثلثية لضعف الزاوية أ استنتاجًا مما درسته فى الدرس السابق؟
ناقش معلمك فى الإجابات التى توصلت إليها.

تعلم

الدوال المثلثية لضعف الزاوية:

The trigonornetric functions of the double - angle

تعلم أن:

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب (بوضع ب = أ)

∴ جا (أ + أ) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

∴ جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ لكل أ ∈ ح (١)

بالمثل يكون:

جتا ٢أ = حتا٢ أ - جا٢ أ لكل أ ∈ ح
= ٢ حتا٢ أ - ١
= ١ - ٢ جا٢ أ

ظا ٢أ = $\frac{٢ظا أ}{١ - ظا^{٢} أ}$ حيث ظا أ معرفه، ظا٢ أ ≠ ١

تعبير شفهى:

١- اكتب صورة القوانين السابقة إذا ضاعفنا الزاوية ٢أ لتصبح ٤أ؟

تذكر أن

العلاقات الاساسيه بين الدوال المثلثية:

حا٢ حـ + حتا٢ حـ = ١

ظا٢ حـ + ١ = قا٢ حـ

طتا٢ حـ + ١ = قتا٢ حـ

قتا حـ = $\frac{١}{جا حـ}$

قا حـ = $\frac{١}{جتا حـ}$

ظا حـ = $\frac{جا حـ}{جتا حـ}$

ظتا حـ = $\frac{١}{ظا حـ}$ ،

ظا حـ = $\frac{١}{ظتا حـ}$

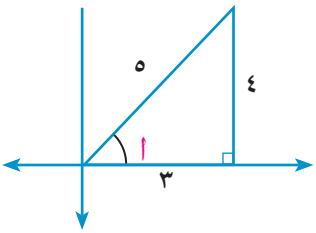
مثال

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

(١) إذا علمت أن جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث ٠° < أ < ٩٠° ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى:

أ) حا٢أ ب) جتا ٢أ ج) ظا ٢أ

الحل



∵ جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ∵ أ تقع في الربع الأول

∴ جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ (موجب لأن أ زاوية حادة)

أ حا٢أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

ب حتا٢أ = ١ - ٢ جا^{٢}أ = ١ - ٢ × $\frac{١٦}{٢٥}$ = $\frac{-٧}{٢٥}$

(يمكنك استخدام الصور الأخرى لقانون جيب تمام ضعف الزاوية)

ج ظا٢أ = $\frac{\text{جا٢أ}}{\text{جتا٢أ}}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ÷ ($\frac{-٧}{٢٥}$) = $\frac{-٢٤}{٧}$

حاول أن تحل

(١) إذا كان جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠° < أ < ٩٠° أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتي:

أ جا٢أ ب جتا٢أ ج ظا٢أ

مثال **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية**

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ ٢ جا ١٥° جتا ١٥ ب ٢ حتا^{٢} ٢٢°٣٠′ - ١

الحل

أ ٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا ٢ × ١٥° = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

ب ٢ حتا^{٢} ٢٢°٣٠′ - ١ = جتا (٢ × ٢٢°٣٠′) = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتي:

أ ٢ جا ٢٢°٣٠′ جتا ٢٢°٣٠′ ب ٢ حتا^{٢} ٧٥° - ١ ج حتا^{٢} ٦٧,٥° - جا^{٢} ٦٧,٥°

د $\frac{\text{٢ظا ٢٢°٣٠′}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ ٢٢°٣٠′}}$ هـ $\frac{\text{٢جتا}^{٢}\text{ ١٦٥° - ١}}{\text{جا ٧٥° جتا ٧٥°}}$

الدوال المثلثية لنصف الزاوية *The trigonornetric functions of the half-angle*

تعلم

سبق وأن علمت أن: جتا أ = ١ - ٢ جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ (متطابقة ضعف الزاوية)

أي أن: ٢ جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ = ١ - جتا أ (من خواص المقادير الجبرية)

جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{\text{١ - جتا أ}}{٢}$ (بقسمة الطرفين على ٢)

جا $\frac{أ}{٢}$ = $\pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{٢}}$ وبالمثل يمكن إيجاد الدوال المثلثية لكل من: جتا $\frac{أ}{٢}$ ، ظا $\frac{أ}{٢}$

جا $\frac{أ}{٢}$ = $\pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{٢}}$ ، جتا $\frac{أ}{٢}$ = $\pm\sqrt{\frac{١ + \text{جتا } أ}{٢}}$ ، ظا $\frac{أ}{٢}$ = $\pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{١ + \text{جتا } أ}}$ حيث جتا أ ≠ -١

يتم تحديد الاشارة وفقًا للربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{أ}{٢}$

مثال

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

(٣) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ جا $\frac{\theta}{٢}$ علمًا بأن ، جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

ب جتا ٧٥°

ج ظا ٢٢°٣٠′

الحل

أ ∵ جا $\frac{\theta}{٢}$ = $\pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } \theta}{٢}}$

∴ جا $\frac{\theta}{٢}$ = $\pm\sqrt{\frac{١ - (-\frac{٣}{٥})}{٢}}$ = $\pm\sqrt{\frac{٨}{١٠}}$

∴ جا $\frac{\theta}{٢}$ = $\pm\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ = $\pm\sqrt{\frac{٢}{٥}}$

∵ ١٨٠° < θ < ٢٧٠° وبالقسمة على ٢ فإن ٩٠° < $\frac{\theta}{٢}$ < ١٣٥°

∵ جا $\frac{\theta}{٢}$ = $\sqrt{\frac{٢}{٥}}$ (الإشارة موجبة لأنها تقع في الربع الثاني)

ب جتا ٧٥° = جتا $\frac{١٥٠°}{٢}$ (لأن ٧٥° = $\frac{١٥٠°}{٢}$)

= $\sqrt{\frac{١ + \text{جتا } ١٥٠°}{٢}}$ (٠ < ٧٥° < ٩٠°) تقع في الربع الأول فالقيمة موجبة

= $\sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢}}$ = $\sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٣}}{٤}}$ بضرب البسط والمقام × ٢

$\frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٣}}}{٢}$ بالتبسيط

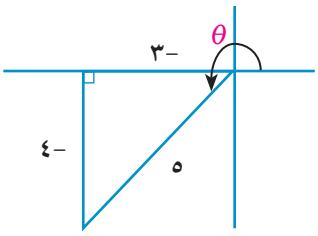
$\frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٣}}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٤ - ٢\sqrt{٣}}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{(١ - \sqrt{٣})^٢}}{٢}$

$\frac{(١ - \sqrt{٣})}{\sqrt{٢}\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

ج ظا ٢٢°٣٠′ = ظا $\frac{٤٥°}{٢}$ (لأن ٢٢°٣٠′ = $\frac{٤٥°}{٢}$)

= $\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } ٤٥°}{١ + \text{جا } ٤٥°}}$ (٠ < ٢٢°٣٠′ < ٩٠°) تقع في الربع الأول فالقيمة موجبة

= $\sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{١ + \frac{\sqrt{٢}}{٢}}}$ = $\sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٢ + \sqrt{٢}}}$ بالضرب في مرافق المقام (٢ − $\sqrt{٢}$)



$$= \sqrt{\frac{\sqrt{٢}-٢}{\sqrt{٢}+٢} \times \frac{\sqrt{٢}-٢}{\sqrt{٢}-٢}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{٢}-٢)^{٢}}{٤-٢}} = \sqrt{\frac{٤-(٢+\sqrt{٢}٤)}{٢-٤}}$$

$$= \sqrt{٢-\sqrt{٢}٢} = \sqrt{٢-\sqrt{٢}٢+١} = \sqrt{(١-\sqrt{٢})٢} = \sqrt{٢}-١$$

حاول أن تحل

(٣) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من: أ جتا $\frac{\theta}{٢}$ علمًا بأن جا$\theta = -\frac{٤}{٥}$ ، $١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$

ب جتا $٢٢\frac{١}{٢}^\circ$ جـ ظا ١٥°.

مثال

إثبات صحة متطابقة مثلثية

(٤) أثبت صحة المتطابقة: قتا٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س ، ثم استخدم المتطابقة السابقة لإيجاد قيمة ظتا ١٥°.

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{١}{\text{جا}٢\text{س}} + \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}٢\text{س}} = \frac{١+\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}٢\text{س}}$

$= \frac{١+(٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}-١)}{٢\,\text{جا س جتا س}} = \frac{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}{٢\,\text{جا س جتا س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} =$ ظتا س (الطرف الأيسر)

بوضع س = ١٥° في المتطابقة: قتا ٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س

$\therefore$ ظتا ١٥° = قتا ٣٠° + ظتا $٣٠^\circ = ٢ + \sqrt{٣}$

حاول أن تحل

(٤) أثبت أن: جتا ٢ س = $\frac{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}$ ومن ذلك أوجد قيمة $\frac{١-\text{ظا}^{٢}١٥^\circ}{١+\text{ظا}^{٢}١٥^\circ}$

مثال

إيجاد قيمة نسبة مثلثية

(٥) إذا كان ٤ جتا ٢ حـ + ٣ جا ٢ حـ = ٠ فأوجد بدون استخدام الآله الحاسبة قيمة ، ظا حـ ، حيث حـ قياس زاوية حادة موجبة.

الحل

$\because$ ٤ جتا ٢ حـ + ٣ جا ٢ حـ = ٠ $\therefore$ ٤جتا ٢ حـ = -٣ جا ٢ حـ

$\therefore \frac{\text{جا}٢\text{حـ}}{\text{جتا}٢\text{حـ}} = \frac{٤}{-٣}$ $\therefore$ ظا ٢ حـ $= \frac{٤}{-٣}$

$\therefore \frac{٢\,\text{ظا حـ}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{حـ}} = \frac{-٤}{٣}$ $\therefore$ ٦ظا حـ $= -٤ + ٤\,\text{ظا}^{٢}$ حـ

$\therefore$ ٢ظا^{٢} حـ -٣ ظا^{٢} حـ - ٢ = صفر

(٢ ظا حـ + ١) (ظا حـ - ٢) = صفر $\therefore$ ظا حـ = $-\frac{١}{٢}$ (مرفوض) أو ظا جـ = ٢

فكر: استخدام الدوال المثلثية لنصف الزاوية لإيجاد قيمة ظا حـ.

حاول أن تحل

(٥) إذا كان ٤ جا هـ + ٣ جتا هـ = ٣ ، فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ، ظا $\frac{هـ}{٢} = \frac{٤}{٣}$ ، حيث هـ قياس زاوية حادة موجبة.

مثال

حل المعادلات المثلثية

(٦) أوجد قيم س المحصورة بين ٠ ، ٢ π والتى تحقق المعادلات الآتية:

أ جا ٢ س = جا س　　ب جتا^{٢} س - جا^{٢} س = $-\frac{١}{٢}$　　جـ طا$^{٢}\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١

الحل

أ ∵ جا ٢ س = جا س

٢ جا س جتا س = جا س

(لأن: جا٢س = ٢ جا س جتا س)

جا س (٢جتا س - ١) = ٠

جا س = ٠ ⟹ س = π

جتا س = $\frac{١}{٢}$ ⟹ س = $\frac{\pi}{٣}$ أو س = $\frac{٥\pi}{٣}$

قيم س التى تحقق المعادلة هى:

$\frac{\pi}{٣}$ أو π أو $\frac{٥\pi}{٣}$

ب جتا^{٢} س - جا^{٢} س = $-\frac{١}{٢}$

جتا ٢س = $-\frac{١}{٢}$

(لأن: جتا٢س = جتا^{٢} س - جا^{٢} س)

إما جتا ٢س = جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ ن π)

أو جتا ٢س = جتا ($\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ن π)

حيث ن ∈ صـ

٢س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ ن π

٢س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π

بالقسمة على (٢)

س = $\frac{\pi}{٣}$ + π ن　　س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + π ن

بوضع ن = ٠ ؛ ١

س = $\frac{\pi}{٣}$ ؛ س = $\frac{٤\pi}{٣}$

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ س = $\frac{٥\pi}{٣}$

قيم س التى تحقق المعادلة هى:

$\frac{\pi}{٣}$ ؛ $\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ $\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

فكر: هل لديك حلول أخرى؟ أوجد أحد هذه الحلول.

جـ ∵ ظا$^{٢}\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١

∴ ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١ - ظا$^{٢}\frac{س}{٢}$

∴ $\frac{٢ظا\frac{س}{٢}}{١ - ظا^{٢}\frac{س}{٢}}$ = ١　　∴ ظا س = ١

(ظل موجب فى كل من الربعين الأول والثالث)

فى الربع الأول: س = $\frac{\pi}{٤}$

فى الربع الثالث: س = π + $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٥\pi}{٤}$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى $\frac{\pi}{٤}$ أو $\frac{٥\pi}{٤}$

حاول أن تحل

(٦) أوجد قيم س المحصورة بين ٠ ، ٢ π والتى تحقق المعادلة جتا س + جتا ٢س = ٠

(٧) **الربط بالهندسة:** س ص ع مثلث فيه س ع = ١٢سم، ص ع = ١٨سم، ع ق(∠ع) = ١٥°. أثبت أن ق(∠ص) = ٢ق(∠س).

تمـارين (٤ – ٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت جتا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن جتا ٢ حـ تساوى

أ صفر ب $\frac{-٢}{٣}$ ج $\frac{-٧}{٩}$ د $\frac{٢}{٣}$

(٢) جا أ جتا أ تساوى

أ $\frac{١}{٢}$ جا ٢أ ب جا ٢أ ج جتا ٢أ د $\frac{١}{٢}$ جتا ٢أ

(٣) جتا^{٢} حـ - جتا ٢ حـ تساوى

أ جا حـ ب جتا حـ ج جا^{٢} حـ د ظا حـ

(٤) ١ - ٢ جا^{٢} ٥٠° تساوى

أ جا ١٠٠° ب جتا ٥٠° ج جتا ١٠٠° د جا ٥٠°

(٥) ١ + جتا ٤أ تساوى

أ ٢ جتا^{٢} ٤أ ب جتا^{٢} ٢أ ج جتا^{٢} ٤أ د ٢جتا^{٢} ٢أ

(٦) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: جا ٢θ ، جتا ٢θ، ظا ٢θ إذا كان:

أ جا θ = $\frac{٤}{٥}$، ٠° < θ < ٩٠° ب جتا θ = $\frac{١}{٣}$، ٠° < θ < $\frac{\pi}{٢}$

ج قتا θ = $\frac{٥}{٣}$، π < θ < $\frac{٣\pi}{٢}$ د ظتا θ = $\frac{٣}{٢}$، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

(٧) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: جا ٢θ ، جتا ٢θ، جا $\frac{\theta}{٢}$ ، جتا $\frac{\theta}{٢}$:

أ جتا θ = $\frac{١}{٤}$، ٠° < θ < ٩٠° ب جا θ = $\frac{٣}{٥}$، ٩٠° < θ < ١٨٠°

ج ظا θ = $\frac{٤}{٣}$، π < θ < $\frac{٣\pi}{٢}$ د جا θ = $\frac{١٥}{١٧}$، $\frac{٣\pi}{٢}$ < θ < ٢π

(٨) إذا علمت ان جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، حيث أ قياس زاوية حادة، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة:

جا ٢أ ، جتا ٢أ، ظا ٢أ ، جتا $\frac{أ}{٢}$

(٩) إذا كان أ قياس زاوية حادة، جتا ٢أ = $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: حاأ ، حتاأ ، ظا٢أ

(١٠) إذا كان جا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: جتا $\frac{أ}{٢}$ ، جا أ ، حتاأ

(١١) إذا كان جتا ب = $\frac{-٤}{٥}$ ، π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة $\frac{\text{جا ٢ ب}}{٢ \text{ جتا}^٢ \text{ب}}$

(١٢) عبر عن كل مما يأتى فى صورة نسبة مثلثية واحدة:

أ جا ٣٥° جتا ٣٥°　　ب $\frac{\text{ظا ٤٠°}}{١ - \text{ظا}^٢ ٤٠}$　　ج جا ٢٥° جتا ٣٥° - حتا ٢٥° جا ٣٥°

د $\frac{\text{ظا ٥٠° - ظا ٤٠°}}{١ + \text{ظا ٥٠° ظا ٤٠°}}$　　هـ حتا^٢ ٢٥ - جا^٢ ٢٥　　و $\frac{١ - \text{جتا}\theta + \text{جا}\theta}{١ + \text{جتا}\theta + \text{جا}\theta}$

(١٣) أوجد قيم س المحصورة بين ٠° ، ٢π والتى تحقق كل معادلة مما يأتى:

أ جا ٢ س = جا س　　ب جا^٢ ٢س + ٢ جا ٢ س + ١ = ٠　　ج جتا س - ٢ جا$^٢ \frac{١}{٢}$ س = ٠

(١٤) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ $\frac{١ - \text{جتا}٢أ}{٣ + \text{جتا}٢أ} = \frac{\text{جا}^٢ أ}{١ + \text{جتا}^٢ أ}$　　ب $\frac{١ - \text{ظتا}\theta}{١ + \text{ظتا}\theta} = \frac{\text{جتا}٢\theta}{١ + \text{جا}٢\theta}$

(١٥) **الربط بالميكانيكا:** ركل لاعب كرة القدم بزاوية قياسة ٣٠° مع سطح الأرض وبسرعة ابتدائية مقدارها ١٤,٧ م/ث. إذا كانت المسافة الأفقية ف التى تقطعها الكرة تعطى بالعلاقة: ف = $\frac{٢ ع^٢ \text{جا}\theta \text{ جتا}\theta}{د}$ حيث د عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث٢ ، ع تمثل السرعة الابتدائية.

أولاً: ضع العلاقة السابقة فى أبسط صورة

ثانيًا: أوجد المسافة الأفقية ف التى تقطعها الكرة بالمتر.

نشاط

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

(١٦) استخدم الحاسبة البيانية أو احد البرامج الرسومية للحاسب أو (التابلت) فى رسم منحنى الدالة د حيث

د(س) = جاθ جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جتاθ جا $\frac{\pi}{٤}$ حيث: -٢$\pi \leq \theta \leq$ ٢π

أ هل يمكنك استنتاج الدالة د من التمثيل البيانى للدالة ؟ فسر ذلك.

ب أثبت صحة الدالة المستنتجة من الرسم باستخدام القوانين.

صيغة هيرون

٤ - ٤

Heron Formula

سوف تتعلم

- إيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه.
- إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس أضلاعه.

المصطلحات الأساسية

- صيغة هيرون Heron formula

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- الشبكة الدولية للمعلومات

مقدمة تاريخية:

هيرون (*Heron*) عاش في مدينة الإسكندرية قبل الميلاد، وتنسب إليه صيغة هيرون لإيجاد مساحة سطح المثلث بدلالة أطوال أضلاعه ، وهناك اعتقاد بأن هذه الصيغة معروفة من قبل هيرون وقد نسبت إليه لوجودها مثبتة في أحد أجزاء مصنعه المسمى متريكا(*Metrica*)الذى ضمنه العديد من المعارف الهندسية سواء في الهندسة المستوية أو المجسمات أو المساحات وغيرها.

إيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه:

افرض أن أ ، ب ، جـ هى أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ حيث:

أ + ب + جـ = ٢ ع (حيث ع نصف محيط المثلث)

من قاعدة جيب التمام نعلم أن:

$$\text{جتا جـ} = \frac{أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}}{٢ أ ب} \quad (١)$$

ومن متطابقة فيثاغورث: $\text{جا جـ} = \sqrt{١ - \text{حتا}^{٢} \text{جـ}}$ (٢)

(لاحظ أن: $٠^{\circ} < \text{جـ} < ١٨٠^{\circ}$ فتكون جا جـ > ٠)

بالتعويض من (١) ، (٢) فيكون:

$$\text{جا جـ} = \sqrt{\frac{٤ أ^{٢} ب^{٢} - (أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢})^{٢}}{٤ أ^{٢} ب^{٢}}} \text{ بتوحيد المقامات}$$

$$\text{جا جـ} = \frac{١}{٢ أ ب} \sqrt{(٢ أ ب + (أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}))(٢ أ ب - (أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}))}$$

تحليل فرق بين مربعين

$$= \frac{١}{٢ أ ب} \sqrt{[(أ + ب)^{٢} - جـ^{٢}][جـ^{٢} - (أ - ب)^{٢}]}$$

وضع المقدار في صورة مربع كامل

$$= \frac{١}{٢ أ ب} \sqrt{(أ + ب + جـ)(ب + جـ - أ)(أ + جـ - ب)(أ + ب - جـ)}$$

بالتحليل كفرق بين مربعين

$$= \frac{١}{٢ أ ب} \sqrt{٢ ع (أ + ب + جـ - ٢ أ)(أ + ب + جـ - ٢ ب)(أ + ب + جـ - ٢ جـ)}$$

$$= \frac{1}{2 أ ب} \sqrt{2ع (2ع - 2أ)(2ع - 2ب)(2ع - 2جـ)}$$

$$= \frac{1}{2 أ ب} \sqrt{16 ع (ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}^{1} أ ب} \sqrt{ع (ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)} \quad (٣)$$

ولكن: م (△ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ (٤)

بالتعويض من (٣) فى (٤) م (△ أ ب جـ) = $\sqrt{ع (ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}$

أى أن: مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه هى أ، ب، جـ هى:

△ = $\sqrt{ع (ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}$ حيث ع نصف محيط المثلث

ملاحظة هامة: البرهان لا يمتحن فيه الطالب

نشاط (١)

ابحث في الشبكة الدولية للمعلومات عن الطريقة الهندسية لإثبات صحة صيغة هيرون.

مثال

(١) أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦، ٨، ١٠ من السنتيمترات

الحل

∵ ٢ح = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ سم ∴ ع = ١٢ سم

ع - أ = ١٢ - ٦ = ٦سم ، ع - ب = ١٢ - ٨ = ٤ سم ، ع - جـ = ١٢ - ١٠ = ٢ سم

∴ مساحة △ = $\sqrt{ع (ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}$

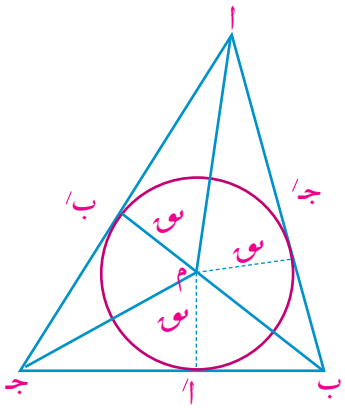
= $\sqrt{١٢ \times ٦ \times ٤ \times ٢}$ = ٢٤ سم٢

تفكير ناقد: هل يمكنك استخدام طريقة أخرى لإيجاد مساحة سطح المثلث فى المثال السابق ؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(١) أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه:

أ = ٥سم ، ب = ١٢ سم ، جـ = ١٣سم



نشاط (٢)

إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه.

(١) اذكر العلاقة بين △أ ب جـ والمثلثات م أب ، م ب جـ ، م أجـ ؟

(٢) هل يمكنك إيجاد علاقة بين طول نصف قطر الدائرة ﻫ ومساحة سطح المثلث أ ب جـ ؟

نستطيع أن نستنتج أن: مـ (△ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أ أ × ﻫ + $\frac{١}{٢}$ ب ب × ﻫ + $\frac{١}{٢}$ جـ جـ × ﻫ

$$\text{ﻫ} \times \text{ع} = \sqrt{\text{ع}(\text{ع}-\text{أ})(\text{ع}-\text{ب})(\text{ع}-\text{جـ})}$$

أى أن $$\text{ﻫ} = \frac{\sqrt{\text{ع}(\text{ع}-\text{أ})(\text{ع}-\text{ب})(\text{ع}-\text{جـ})}}{\text{ع}} = \frac{\text{مـ}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{ع}}$$

مثال

(٢) باستخدام العلاقة السابقة: أوجد طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع △ أب جـ الذى أطوال أضلاعه ٧، ٩، ١٤ من السنتيمترات من الداخل ، مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.

الحل

∵ ٢ ع = ٧ + ٩ + ١٤ = ٣٠ سم ع = ١٥ سم ، ع - أ = ٨سم ، ع - ب = ٦سم ، ع - جـ = ١ سم

بالتعويض فى العلاقة السابقة:

$$\therefore \text{ﻫ} = \frac{\sqrt{\text{ع}(\text{ع}-\text{أ})(\text{ع}-\text{ب})(\text{ع}-\text{جـ})}}{\text{ع}} = \frac{\sqrt{١٥ \times ٨ \times ٦ \times ١}}{١٥} = \frac{٤}{٥}\sqrt{٥}$$ سم

تفكير ناقد: ماذا تتوقع إذا كانت: ع - أ أو ع - ب أو ع - جـ سالبة أوتساوى صفرًا ؟ فسر إجابتك.

مثال

(٣) أوجد مساحة المثلثات الآتية.

أ مثلث أطوال أضلاعه ٧ ، ٩، ١٢ من السنتيمترات

ب المثلث الذي طولا ضلعين فيه هما ٢٤، ٤٠ من السنتيمترات وقياس الزاوية المحصورة بينهما قياسها ٣٠°.

جـ هل يوجد المثلث الذى أطوال أضلاعه ١٢ ، ١٤، ٣٠ من السنتيمرات؟ أوجد مساحته إن امكن ذلك

الحل

أ ∵ ٢ ع = ٢٨ سم ∴ ع = ١٤ سم ، ع - أ = ٧سم ، ع - ب = ٥سم ،
ع - جـ = ٢سم

بالتطبيق في صيغة هيرون:

مساحة سطح المثلث = $\sqrt{١٤ \times ٧ \times ٥ \times ٢} = ١٤\sqrt{٥}$ سم٢

ب ٢ ع = ٥٦ سم ∴ ع = ٢٨ سم ، ع > أحد الأضلاع
∴ لايوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته

جـ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٢٤ \times ٤٠ \times$ جا ٣٠ = $\frac{١}{٢} \times ٢٤ \times ٤٠ \times \frac{١}{٢}$ = ٢٤٠ سم٢

تذكر أن

مساحة سطح المثلث بمعلومية طولا ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب ضلعيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

فكر: هل يمكنك استخدام طريقة أخرى تثبت بها أنه لايوجد مثلث يمكن رسمه؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(٣) أوجد مساحة المثلثات الآتية:

أ مثلث أطوال أضلاعه ٦ ، ٦، ٨ من السنتيمترات.

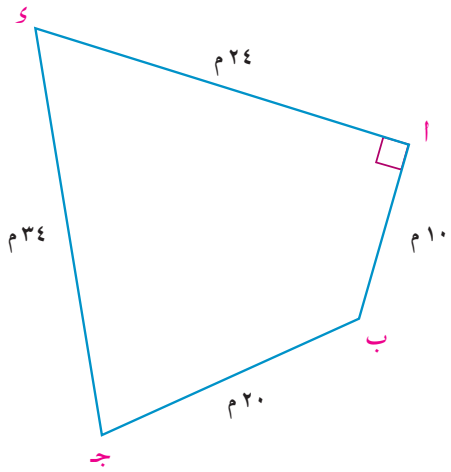
ب المثلث الذى أطوال أضلاعه ٢٤، ٣٦، ٦٠ من السنتيمرات؟ أوجد مساحته إن امكن ذلك

جـ المثلث الذى أطوال أضلاعه ١٠ ، ٢٤، ٢٦ من السنتيمترات.

مثال

الربط بالهندسة

(٤) يبين الشكل المقابل قطعة أرض رباعية الشكل أوجد مساحتها.



الحل

نرسم $\overline{ب ى}$

فى المثلث ا ب ى القائم الزاوية فى ا

∵ $(ب ى)^{٢} = (ا ب)^{٢} + (ا ى)^{٢}$ نظرية فيثاغورث

$= ١٠٠ + ٥٧٦ = ٦٧٦$ ∴ ب ى = ٢٦ م

م $(\triangle ا ب ى) = \frac{١}{٢}$ ا ب × ا ى $= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٢٤ = ١٢٠$ م^{٢}

فى المثلث ب جـ ى:

∵ ٢ ع = ٢٠ + ٣٤ + ٢٦ = ٨٠ ∴ ع = ٤٠ م

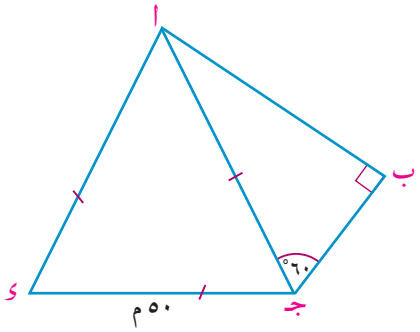
م $(\triangle ب جـ ى) = \sqrt{٤٠ \times ٢٠ \times ٦ \times ١٤} = ٤٠\sqrt{٧}$ م^{٢}

مساحة قطعة الأرض = مساحة $\triangle$ ا ب ى + مساحة $\triangle$ ب جـ ى

$= ١٢٠ + ٤٠\sqrt{٧} = ٤٠ (٣ + \sqrt{٧})$ م^{٢}

حاول أن تحل

(٤) يبين الشكل المقابل قطعة أرض أبعادها كما هو موضح بالشكل. أوجد مساحتها.



تمـاريـن (٤ - ٤)

أكمل مايأتى:

(١) مساحة سطح المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦سم يساوى...

(٢) مساحة سطح المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٠سم وقياس إحدى زاويتي قاعدته ٤٥° يساوى...

(٣) مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٤، ٥ من السنتيمترات يساوى...

(٤) مساحة سطح المثلث الذى طولا ضلعين فيه ٦ ، ٨ من السنتيمترات وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٣٠ ° يساوى...

أوجد مساحة المثلث أ ب جـ فى كل من الحالات الآتية:

(٥) أ = ١٥سم ، ب = ١٢سم ، جـ = ٩ سم

(٦) ب = ١٦سم ، جـ = ٢٠ سم، ق(∠أ) = ٦٠°

(٧) أ = ١٦سم ، ب = ١٨سم ، جـ = ٢٤ سم

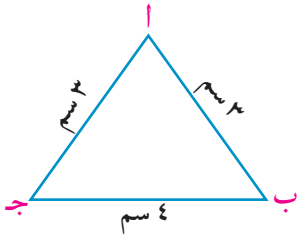
(٨) أ = ٣٢سم ، ب = ٣٦، جـ = ٣٠ سم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦سم ، ٨سم ، ١٠سم يساوى بالسم^{٢}:

أ) ٢٤ ب) ٣٠ جـ) ٤٠ د) ٤٨

(١٠) في الشكل المقابل: مساحة سطح △ أ ب جـ تساوى بالسم^{٢}



أ) ٢٠ ب) $٤\sqrt{٥}$

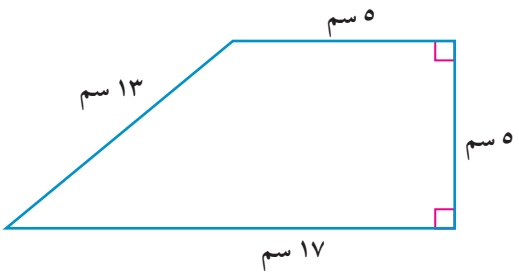
جـ) $٢\sqrt{٥}$ د) ١٠

(١١) إذا كان محيط مثلث هو ٦٠ سم وطول أحد أضلاعه ٢٦سم فإن طولا ضلعيه الأخرين بالسم يمكن أن يكونا:

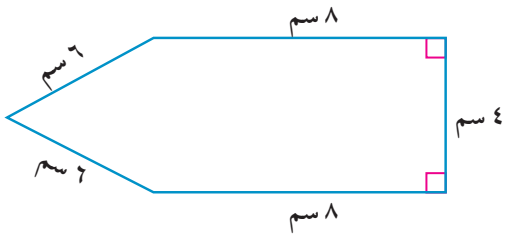
أ) ٤ ، ٣٠ ب) ٣١ ، ٣ جـ) ٢٠ ، ١٤ د) ٢ ، ٣٢

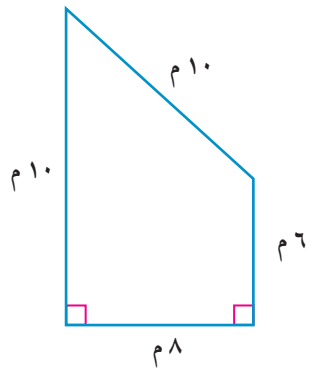
أوجد مساحة كل شكل من الأشكال الآتية مستخدمًا البيانات المبينة على الرسم:

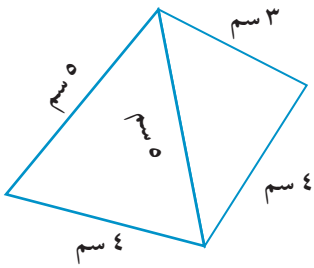
(١٢)

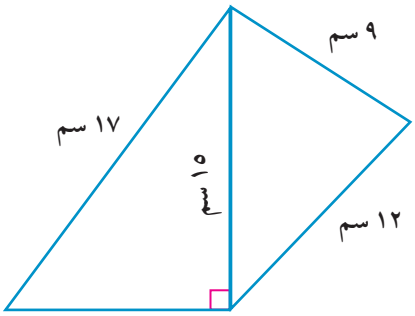


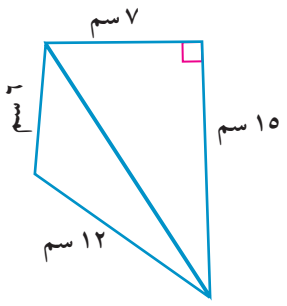
(١٣)



١٤


١٥


١٦


١٧


١٨ أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ ء الذى فيه ق(∠ب) = ٩٠° ، أ ب = ٥سم ، ب جـ = ١٢سم ، أ ء = جـ ء = ١٣سم.

١٩ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه:

أ أ = ٨سم ، ب = ١١سم ، جـ = ١٣ سم

ب أ = ١٢سم ، ب = ١٧سم ، جـ = ٢٥ سم

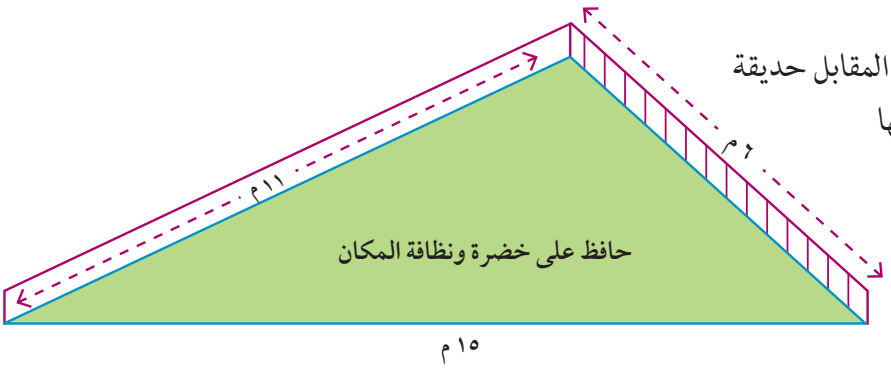
جـ أ = ٤٠ سم ، ب = ٢٤سم ، جـ = ٣٢ سم

د أ = ١١سم ، ب = ٨سم ، جـ = ٦ سم

٢٠ **حدائق:** حديقة على شكل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه هى ٧ : ٥ : ٣ فإذا كان محيط الحديقة يساوى ٣٠٠ متر فأوجد مساحتها.

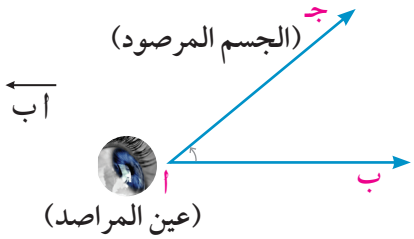
نشاط

٢١ **الربط بالبيئة:** يبين الشكل المقابل حديقة مثلثة الشكل أوجد مساحتها

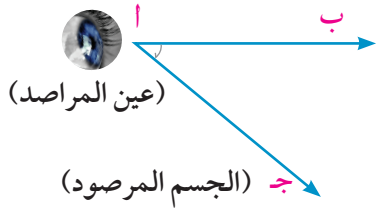


ملخص الوحدة

١ **زاوية الارتفاع:** إذا فرض أن هناك راصدًا عند النقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة جـ أعلى مستوى النظر، فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع الأفقي والشعاع $\overleftarrow{أجـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى زاوية ارتفاع الجسم المرصود جـ بالنسبة لنقطة أ

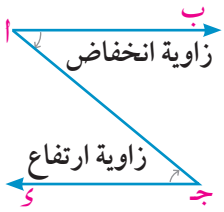


٢ **زاوية الانخفاض:** إذا فرض أن هناك راصدًا من نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة جـ أسفل مستوى النظر، فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overleftarrow{أب}$ الأفقي والشعاع $\overleftarrow{أجـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى زاوية انخفاض الجسم المرصود جـ بالنسبة للنقطة أ.



٣ قياس زاوية انخفاض جـ بالنسبة إلى أ تساوى قياس زاوية ارتفاع أ بالنسبة إلى جـ

٤ الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين:



➢ إذا كان أ، ب قياسى زاويتين فإن:

جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

ظا (أ ± ب) = $\frac{\text{ظا أ} \pm \text{ظا ب}}{١ \mp \text{ظا أ ظا ب}}$ ، حيث أ ≠ $\frac{\pi}{٢}$ (٢ك + ١)، ب ≠ $\frac{\pi}{٢}$ (٢ك + ١) ، ظا أ ظا ب ≠ ± ١ ،

ك ∈ صـ

٥ الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية:

جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ لكل أ ∈ ح

جتا ٢ أ = حتا^{٢} أ - جا^{٢} أ

= ٢ حتا^{٢}أ - ١ = ١ - ٢ جا^{٢} أ لكل أ ∈ ح

ظا ٢ أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ أ}}$ ، حيث ظا أ معرفه، ظا^{٢}أ ≠١

من ذلك أمكن استنتاج ان:

جا أ = ٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$

جتا أ = حتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ = ٢ حتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - ١ = ١ - ٢ جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

ظا أ = $\frac{\text{٢ظا}\frac{أ}{٢}}{\text{١ـ ظا}^{٢}\frac{أ}{٢}}$

٦ مساحة المثلث بمعلومية طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول ضلعيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

٧ إذا كان أ، ب، جـ أطوال أضلاع مثلث محيطه هو ٢ ع فإن:

مساحة سطح المثلث = $\sqrt{\text{ع(ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}}$

تمـــارين عامة

أولًا: مسائل على زاويا الارتفاع والانخفاض

(١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٢° ثم سار على طرق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد قياسها ٣٦°، أوجد ارتفاع البرج لاقرب متر.

(٢) من قمه تل وجد راصد أن قياسى زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته هما ١٨′١٥° ، ٤٢′٢٦° على الترتيب، فإذا كان ارتفاع البرج ٢٠ مترًا، فاحسب ارتفاع التل لاقرب متر.

(٣) من قمه برج ارتفاعه ١٠ أمتار قاس رجل زاويتى ارتفاع وانخفاض أعلى نقطة من مئذنة وأسفل نقطة فيها على سطح الأرض فوجد هما ٢٨′١٤°، ٤٢° على الترتيب فإذا كان ارتفاع البرج والمئذنة مقامين على مستوى أفقى واحد، فاحسب لأقرب متر ارتفاع المئذنة.

(٤) الملاحة البحرية تسير سفينة نحو الشمال الشرقى بسرعة ٢٤ كم/ ساعة، شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى اتجاه ٢٥° غرب الشمال، وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت فى اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى فى اتجاه ١٧° شمال الغرب، أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر، علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد.

(٥) الملاحة البحرية يتحرك قارب بخارى فى الماء فى خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة ٣٠٠متر/ دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها ٣٥°، وبعد دقيقتين ومن نفس القارب ثم رصدت زاوية الارتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها ٦٠° احسب ارتفاع الصخرة.

(٦) الملاحة البحرية تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلومتر/ ساعة، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦,٥ كيلو متر/ ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من لحظة تحركهما معًا.

(٧) من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ مترًا/دقيقة فوجد أن قياسها يساوى ٣٥° ، وبعد ثلاث دقائق أعاد الرصد من نفس النقطة، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبحت ١٥° ، أوجد بعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لاقرب متر.

ثانيًا: مسائل على الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياسى زاويتين وضعف الزاوية

(١) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت صحة كل مما يأتى:

أ) ظا ٧٥° = $٢ + \sqrt{٣}$

ب) $\frac{\text{جتا ٤٠° جتا ١٠° + جا ٤٠° جا ١٠°}}{\text{جا ١٥° جتا ١٥°}} = ٢\sqrt{٣}$

ج) جتا ٧٥° = $\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

(٢) أثبت صحة كل مما يأتى:

أ) حتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (١+ جتا أ) ومن ذلك أوجد قيمة جتا ١٥°

ب) $\frac{٢ \text{جا أ} - \text{جتا ٢أ}}{\text{جا}^{٢} \text{أ}}$ = قا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

ج) $\frac{\text{جا ٢س}}{١ + \text{جتا ٢س}}$ = ظا س

د) $\frac{١ - \text{جتا حـ} - \text{جا حـ}}{١ - \text{جتا حـ} + \text{جا حـ}}$ = ظا $\frac{\text{حـ}}{٢}$

(٣) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ جا $\frac{\pi ٢}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$ - جتا $\frac{\pi ٢}{٣}$ جا $\frac{\pi}{٦}$

ب $\frac{\text{جا ٢٥° جتا ٢٠° + جتا ٢٥° جا ٢٠°}}{\text{جا ٨٠° جتا ٣٥° + جتا ٨٠° جا ٣٥°}}$

(٤) إذا كان جا أ = $\frac{-١٢}{١٣}$ حيث $\frac{\pi ٣}{٢}$ < أ < ٢π فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة جا ٢أ ، جتا ٢أ

(٥) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٣}$ حيث ٠ < أ < $\frac{\pi}{٣}$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة $\frac{١ + \text{جا ٢أ}}{١ + \text{جتا ٢أ}}$

(٦) إذا كان جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < أ < π ، جتا ب = $\frac{-٤}{٥}$ حيث π < ب < $\frac{\pi ٣}{٢}$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: ظا ٢أ، جا (ب - أ)

(٧) إذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٣}$ [، ظا ب = $\frac{-١٢}{٥}$ حيث ب ∈] $\frac{\pi}{٣}$ ، π [، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كلاً من: جتا (أ + ب) ، ظا ٢ب

(٨) إذا كان ظا ٢أ = $\frac{٣}{٤}$ ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة ظا أ

(٩) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٧}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ، ب ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٣}$ [
فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: ظا (أ + ٢ب) = ١

(١٠) إذا كان جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، ظتا ب = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ب ∈] π ، $\frac{\pi ٣}{٢}$ [
فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة فيما كلًا من: ظا (أ - ب) ، جا ٢ب

ثالثًا : مسائل على صيغة هيرون

(١) أوجد مساحة△أ ب جـ في كل حالة من الحالات الآتية:

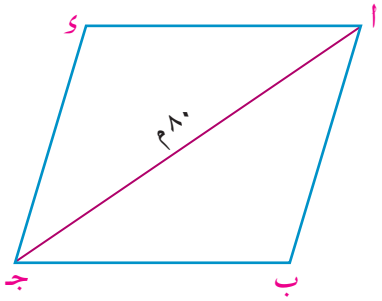
أ أَ = ٣٥ سم ، بَ = ٤٥سم ، جَ = ٥٠ سم

ب أَ = ٨ سم ، بَ = ١١سم ، جَ = ١٣ سم

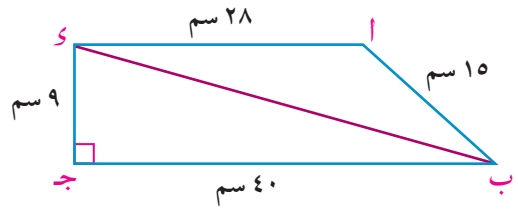
ج أَ = ٢٠٠ سم ، بَ = ٢٤٠سم ، جَ = ٣٦٠ سم

(٢) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه:
ع - أَ = ٣سم ، ع - بَ = ٥سم ، ع - جَ = ٩سم

(٣) **الشكل المقابل**: يمثل قطعة أرض على شكل معين محيطها ٢٠٠ متر وطول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ٨٠ متر أوجد مساحتها.



(٤) أ ب جـ ء شكل رباعى أطوال أضلاعه موضحة كما فى الشكل المقابل. أوجد مساحته.



اختبار تراكمى

أولًا: أسئلة الاختبار من متعدد

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

جا ٣س جتا ٢ س + جتا ٣ س جا ٢س يساوى

(١) جتا ٥س (٢) جا ٥س (٣) جا س (٤) جتا س

(٢) فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ = ٥سم فإن ب تساوى

(١) $\frac{٥ \text{جا} أ}{\text{جا} ب}$ (٢) $\frac{٥ \text{جا} ب}{\text{جا} أ}$ (٣) $\frac{٥ \text{جا} أ}{\text{جا} حـ}$ (٤) $\frac{٥ \text{جا} حـ}{\text{جا} ب}$

(٣) المثلث أ ب جـ الذى فيه أ: ب: جـ = ٣: ٢: ٢ فإن جتا أ تساوى

(١) $-\frac{١}{٤}$ (٢) $-\frac{١}{٨}$ (٣) $\frac{١}{٨}$ (٤) $-\frac{٣}{٤}$

(٤) فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ = ١٥سم ، ب = ٢٥سم ، جـ = ٣٥سم، فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث تساوى:

(١) ٩٠° (٢) ٤٠° (٣) ١٢٠° (٤) ١٥٠°

ثانيًا: أسئلة ذات إجابات قصيرة:

(٥) أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠أ) = ٣٠° ، أ = ١٠سم.

(٦) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ فأوجد أ: ب: جـ

(٧) أوجد قياس اكبر زاوية فى المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٦سم ، ب = ١٤سم ، جـ = ١٠سم

(٨) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ظا (أ + ب)

(٩) أوجد قيمة ظا ١٥° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(١٠) إذا كان جا أ = $\frac{١}{٣}$ فأوجد قيمة جتا ٢ أ

ثالثًا: أسئلة ذات إجابات طويلة

(١١) حل المثلث الذى فيه ق (∠أ) = ٢ ق (∠ب) = ٨٦° ، جـ = ٩سم

(١٢) مثلث س ص ع فيه س = ٩,٤سم، ص = ١٥,٦سم، ق (∠ع) = ٥٤°

أوجد ع لاقرب رقم عشرى واحد ، وكذلك مساحة سطح الدائرة المارة برؤوسه.

(١٣) أوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ١٣سم ، ب = ١٤سم ، جـ = ١٥سم، ثم أوجد مساحته.

(١٤) رصد قائد طائرة هدفًا على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف ٤٥° وعندما هبط مسافة ٢ كم رأسيًّا وجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف اصبح ٣٠° ، أوجد لأقرب كم ارتفاع الطائرة عند بداية الرصد.

(١٥) أوجد مساحة سطح المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٢سم ومحيطه ٣٠سم.

(١٦) قطعة أرض مثلثية الشكل محيطها ١٨٠ متر والنسبة بين أطوال أضلاعها ٢: ٣: ٤ أوجد مساحتها لأقرب متر مربع.

اختبارات عامة

أولًا: اختبارات الجبر

الاختبار الأول — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من بين ٥ أشخاص:

أ ٣ ب ٥ ج ١٠ د ١٥

(٢) الحد العاشر من حدود المتتابعة (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣،....)

أ ٢٩ ب ٣٤ ج ٥٥ د ٨٩

(٣) الحد الأوسط في المتتابعة (٢، ٥، ٨، ١١،...، ١٢٨)

أ ٢٢ ب ٤٣ ج ٦٥ د ٢٧٩٥

(٤) مجموع حدود المتتابعة الهندسية (٨١، ٢٧، ٩،...)

أ $\frac{٢٤٣}{٤}$ ب ١١٧ ج ١١٨ د $\frac{٢٤٣}{٢}$

السؤال الثاني:

(١) إذا كان $ن ل_{ر-١}$ = ٦٧٢٠، $ن و_{ر-١}$ = ٥٦ فما قيمة كل من ن ، ر

(٢) أوجد المتتابعة الحسابية التي مجموع حديها الثالث والخامس ٢٢ وينقص حدها الرابع عن حدها السابع بمقدار ٩ ثم أوجد مجموع ٢٥ حدًّا الأولى منها.

السؤال الثالث:

(١) مدرسة بها ١٠ طلاب يمارسون كرة السلة، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من ٥ أعضاء وقائد للفريق من هؤلاء اللاعبين.

(٢) كم حدًّا يمكن أخذه من حدود المتتابعة الهندسية (٢، ٦، ١٨،...) ابتداء من حدها الأول حتى يكون مجموعها ٦٥٦٠؟

السؤال الرابع:

(١) أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٣ ، ١٠٠٠ وكل منها يقبل القسمة على ٧

(٢) كرة من المطاط تسقط من ارتفاع ١٠ أمتار على الأرض وترتد رأسيًّا إلى نصف الارتفاع الذي سقطت منه في كل مرة ترتد فيها لأعلى، أوجد مجموع المسافات التي قطعتها الكرة.

الاختبار الثانى — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة::

(١) إذا كان $\frac{\text{ل}(\text{ن}+١)}{\text{ل}(\text{ن}-١)} = ٣٠$ فما قيمة ن

أ) ٥ ب) ٦ ج) ٢٩ د) ٣٠

(٢) قيمة المتسلسلة $\sum_{\text{ر}=١}^{١٥} (\text{ر}^{٢} + \text{ر} + ١)$

أ) ١٣٧٥ ب) ٣٧٢٠ ج) ١٤٤٠٠ د) ٢٢٣٢٠٠٠

(٣) عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧، ١١، ١٥،...، ٢٧١)

أ) ٣٤ ب) ٦٧ ج) ١٦٩ د) ٩٣١٣

(٤) إذا كانت س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤، س - ٣، ٢س + ٦،...)

أ) ١ ب) ٥ ج) ٣ د) ٢٤

السؤال الثانى:

(١) إذا كان $\text{ل}_{\text{ر}}^{٥} = ٢ \times \text{ل}_{\text{ر}-١}^{٦}$ فما قيمة ر

(٢) أوجد رتبة أول حد سالب من حدود المتتابعة (١٥٢ - ٩ن)، ثم أوجد أكبر مجموع يمكن الحصول عليه من حدود هذه المتتابعة.

السؤال الثالث:

(١) أوجد كم عددًا زوجيًّا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢، ٣، ٤، ٥، ٧}؟

(٢) متتابعة هندسية حدودها موجبة، مجموع الحدود الثلاثة الأول منها ١٤، ويزيد حدها الأول عن حدها الثاني بمقدار ٤، أوجد المتتابعة ومجموع عدد لا نهائي من حدودها ابتداء من حدها الأول.

السؤال الرابع:

(١) متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة يساوي $\frac{١٧١}{٣٢}$، وحدها الثاني يساوي $\frac{٢٧}{١٦}$، أوجد المتتابعة وحدها العاشر.

(٢) مسرح به ٢٥ صفًّا من الكراسي، يحتوي الصف الأول على ٢٠ كرسي، ويحتوي الصف الثاني على ٢٢ كرسي ويحتوي الصف الثالث على ٢٤ كرسي وهكذا، أوجد عدد الكراسي في جميع صفوف المسرح.

الاختبار الثالث — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التي يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣} حيث أ ≠ ب

أ ٢ ب ٣ ج ٦ د ٩

(٢) الحد النوني للمتتابعة (٢، ٢، $\frac{٨}{٣}$ ، ٤ ،...)

أ (ن - ١) ب ٢ن - ١ ج ٢ن-١ د $\frac{٢^{ن}}{ن}$

(٣) مجموع ٢٥ حدًّا الأولى من حدود المتتابعة (٣ - ٢ن)

أ ٦٥٠ ب ٦٠٠ ج -٥٧٥ د -٦٠٠

(٤) إذا كانت (س ، ص، ع،...) في تتابع هندسي فإن:

أ ٢ص > س + ع ب ص^{٢} > س ع ج ص = س ع د $\sqrt{ص}$ = س ع

السؤال الثاني:

(١) إذا كان $و_{٢ر+١}^{٢٥} = و_{٣ر-١}^{٢٥}$ فما قيمة ر

(٢) أوجد عدد الحدود التي يمكن أخذها من حدود المتتابعة الحسابية (-٤٣ ، -٣٦ ، -٢٩ ،...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموعها ٢٢١.

السؤال الثالث:

(١) يدرس الطالب في إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمان مواد مختلفة ولا يحق له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح في ٦ منها على الأقل، فبكم طريقة يمكن للطالب الانتقال إلى السنة التالية؟

(٢) متتابعة هندسية مجموع عدد لا نهائي من حدودها ابتداء من حدها الأول يساوي ١٠٨، ويزيد حدها الأول عن حدها الثاني بمقدار ١٢، أوجد المتتابعة ومجموع حدودها السبعة الأولى.

السؤال الرابع:

(١) أوجد مجموعة الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ،... ، ١١٠)

(٢) شركة لتخزين المحاصيل الزراعية لديها سبعة مواقع لتخزين القمح، تسع الصومعة الأولى ٢٧٠ طنًّا من القمح، وكل صومعة يعد ذلك تسع ثلثي الكمية التي تسعها الصومعة السابقة لها، هل يمكن للشركة أن تقوم بتخزين ٨٠٠ طن من القمح؟ وما أكبر كمية تستطيع الشركة تخزينها بصوامعها مقربًا الناتج لأقرب طن؟

الاختبار الرابع — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص في خمسة مقاعد على شكل دائرة:

أ) ١ ب) ٥ ج) ٢٤ د) ١٢٠

(٢) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٧}^{٢٣} ٣ر$

أ) ٢٥٥ ب) ٧٦٥ ج) ٨٠٧ د) ٨٢٨

(٣) إذا كانت (س، -٣ ، ٤س -١ ،...) متتابعة حسابية فما قيمة س؟

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{-٢}{٥}$ ج) -١ د) -٥

(٤) مجموع عدد لا نهائي من حدود المتتابعة الهندسية (ع$_ر$) التي حدها ع$_١$ =١ ، ع$_ر$ = ٢ع$_{ر+١}$

أ) ∞ ب) ٢ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) $\frac{١}{٢}$

السؤال الثاني:

(١) إذا كان $ر^{٢}+م$ و$_ر$ = ١٩٠ ، ر - ٢م ل$_ر$ = ٦٠ فأوجد قيمة كل من ر ، م

(٢) متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٢٦، ومجموع حدودها ٤٦٨، أوجد عدد حدودها و إذا كان حدها العاشر يساوي ٤٧ فأوجد المتتابعة.

السؤال الثالث:

(١) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} فأوجد عدد عناصر من ص ، ع

حيث ص = {(أ ، ب): أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}

ع = {{أ ، ب، جـ}: أ ، ب، جـ ∈ س}

(٢) متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأول يساوي ١٣، مجموع حدودها الثلاثة التالية لها يساوي ٣٥١. أوجد المتتابعة ومجموع الحدود العشرة الأولى منها.

السؤال الرابع:

(١) متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٣، ومجموع مربعيهما يساوي ٥ أوجد المتتابعة.

(٢) راكب دراجة يهبط منحدرًا في ١١ ثانية فيقطع في الثانية الأولى ٤ أمتار ثم يقطع في كل ثانية بعد ذلك ٥ أمتار زيادة عن المسافة التي قطعها في الثانية السابقة. أوجد المسافة التي قطعها راكب الدراجة أثناء هبوطه على المنحدر.

الاختبار الخامس — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $ل_{ن}$ يمكن أن تساوي

أ) ٢٤ ب) ٣٥ ج) ٤٢ د) ٤٨

(٢) يقال للمتتابعة $(ع_ن)$ أنها تزايدية لجميع قيم $ن \in صـ^+$ إذا كان

أ) $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} < ١$ ب) $ع_ن = ع_{ن+١}$ ج) $ع_{ن+١} > ع_ن$ د) $٠ < \frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} < -١$

(٣) الوسط الحسابي للعددين ٣ س - ٧ ، ٥ س +٣

أ) ٤س - ٥ ب) ٤س - ٢ ج) ٤س + ٢ د) ٨س - ٤

(٤) الحد النوني للمتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ،)

أ) ٢ + ٢ $ن^{-١}$ ب) ٢$ن$ ج) ٢ $ن^{-١}$ د) ٢ $ن^{+١}$

السؤال الثاني:

(١) إذا كان $\frac{|٣ن - ٧|}{}$ = ١٢٠ فما قيمة $ن$ و $ن_{-١}$ ؟

(٢) ادخل ٢٨ وسطًا حسابيًا بين ٤ ، ٩١ ثم أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية الناتجة.

السؤال الثالث:

(١) بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من ٥ أشخاص في نفس الجنس من ٧ رجال، ٥ سيدات؟

(٢) متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثالث يساوي ٢٠ ، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي ٢٦ ، بين أن هناك متتابعتين تحققان ذلك وأنه يمكن جمع عدد غير منته من حدود إحداهما ثم أوجد ذلك المجموع ابتداء من الحد الأول.

السؤال الرابع:

(١) عند إدخال $ن$ من الأوساط الهندسية بين ٨١ ، $\frac{١}{٧٢٩}$ كان مجموع الوسطين الأولين ٣٦ ، ومجموع الوسطين الأخيرين $\frac{٤}{٢٤٣}$ ، أوجد مجموع هذه الأوساط الهندسية.

(٢) تريد شركة توزيع مبلغ ٤٦٠٠٠ جنيه على أفضل ١٠ مندوبي مبيعات لديها، فكانت مكافأة المندوب العاشر في الترتيب ١٠٠٠جنيه، وكان الفرق في المكافأة بين كل مندوب والسابق له في الترتيب ثابتًا، أوجد مقدار مكافأة أفضل مندوب في الترتيب لدى الشركة.

الاختبار السادس — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان ص = جا ٢ س فإن $\frac{د ص}{د س}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$ يساوى.

أ) ٢ ب) ١ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\sqrt{٣}$

(٢) إذا كان جتا هـ = $\frac{٢}{٣}$ فإن جتا ٢ هـ =

أ) $\frac{٤}{٩}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{-١}{٩}$ د) $\sqrt{٣}$

(٣) $\int$ (٢ س + ٣)^{٤} د س =

أ) $\frac{١}{٥}$ (٢س + ٣)^{٥} + ث ب) $\frac{١}{١٠}$ (٢ س + ٣)^{٥} + ث ج) $\frac{١}{١٠}$ (٢ س + ٣)^{٣} + ث د) ١٠ (٢ س + ٣)^{٣} + ث

(٤) متوسط تغير الدالة د حيث د(س) = س^{٢} عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى.

أ) ٠,٦١ ب) ٦,١ ج) ٩ د) ٩,٦١

السؤال الثانى:

(١) أوجد المشتقة الأولى إذا كان: ص = س^{٢} جا ٢ س

(٢) بدون استخدام الحاسبة أثبت أن $\frac{جا ٢ س}{١ + جتا ٢س}$ = ظا س

السؤال الثالث:

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{س^{٢} + ٣}{س - ٢}$ عند س = ١

(٢) أوجد:

أ) $\int$ (س^{٢} + ٢س) د س ب) $\int$ (جا س − جتا س)^{٢} د س

السؤال الرابع:

(١) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة: ص = $\frac{١}{س - ٣}$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم س + ص = صفر.

(٢) من قمة منزل ارتفاعه ٢٥ مترًا كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٧٠°، قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٠° أوجد ارتفاع البرج علماً بأن قاعدتى المنزل والبرج فى مستوى أفقى واحد.

الاختبار السابع — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} + ٢س-١ عندما س = ٢ يساوى

أ) ٤ ب) ٨ ج) ١٧ د) ١٤

(٢) جا أ جتا ب - جتا أ جا ب =.

أ) جا (أ+ب) ب) جتا (أ + ب) ج) جا (أ- ب) د) جتا (أ - ب)

(٣) $\int \frac{س^{٢}+٣س}{س}$ ء س =.

أ) س + ٣ ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣ س + ث ج) س^{٢} + ٣ س + ث د) $\frac{س^{٣}+٣س^{٢}}{س^{٢}}$

(٤) $\frac{ء}{ء س}$ (جا س جتا س) =

أ) حاس ب) جتا س ج) $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س د) جتا ٢س

السؤال الثانى:

(١) إذا كان ص = د(س) حيث ص = س^{٢} - أ س، فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣، ٠) الواقعة عليه.

(٢) إذا كان قا أ = $\frac{٥}{٤}$ ، قتا ب = $\frac{١٣}{٥}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين فأوجد قا (أ - ب).

السؤال الثالث:

(١) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث

د(س) = { س^{٢} ، س < ٢ ; ٤ س -١ ، س ≥ ٢ } عند س = ٢

(٢) أوجد $\int$ (١ – جتا س)^{٢} ء س

السؤال الرابع:

(١) تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب بسرعة ٢٦ كم/س ، وفى نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى فى اتجاه الشرق بسرعة ١٥ كم/س أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات.

(٢) إذا كان ص = ع^{٥} +٣ ، ع = (س -١)^{٣} فأوجد قيمة $\frac{ء ص}{ء س}$ عندما س = ٢

الاختبار الثامن — التفاضل وحساب المثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابة المعطاة:

(١) عندما تتغير قيمة س من ١ إلى ١,٣ حيث د(س) = س^{٣} فإن متوسط التغيير للدالة يساوي.

أ ٢,١٩٧ ب ١ ج ٧,٣٢ د ٣,٩٩

(٢) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} + ٣ عندما س = ١ هى:

أ ص = ٢ س ب ص - ٢ س = ٥ ج س + ص = ٢ د ٢س - ص+٢ = صفر

(٣) إذا كان جا أ = $\frac{-٣}{٥}$ فأوجد قيمة جتا ٢ أ

أ $\frac{١٦}{٢٥}$ ب $\frac{٧}{٢٥}$ ج $\frac{-٧}{٢٥}$ د $\frac{-١٦}{٢٥}$

(٤) $\int$ (٢ س +١)^{٥} ء س =.

أ (٢س +١)^{٦} ب $\frac{١}{٢}$ (٢س + ١)^{٦} ج $\frac{١}{١٢}$ (٢س + ١)^{٦} + ث د (٢س+١)^{٦} + ث

السؤال الثانى:

(١) أوجد معدل التغير للدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢ عندما س = ٢

(٢) إذا كان جا س + جتا س = $\frac{\sqrt{٧}}{٣}$ فأوجد قيمة جا ٢ س

السؤال الثالث:

(١) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = جا س + ٢ جتا س عند النقطة (٠ ، ٢)

(٢) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان ص = (ع^{٣} - ع^{٢}) ، ع = ٢س + ١ عندما س = -١

السؤال الرابع:

(١) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = س^{٣} - ٥س +٤ عند النقطة الواقعة عليه والتى إحداثيها السينى يساوى -١.

(٢) رصد رجل من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٣٥° ولما صعد نحو التل مسافة ١٥٠٠م على مستوى يميل إلى الأفقى بزاوية قياسها ٢٠° وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل أصبحت ٤٥° أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

الاختبار التاسع — التفاضل وحساب المثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان حتا^{٤}س - جا^{٤}س = جتا أ س ، فإن قيمة أ تساوى.

أ) ٤ ب) ٨ ج) ٦ د) ٢

(٢) إذا كان ص = قاس ، فأوجد ص$'$ = ...

أ) قتا س ب) قا س ظا س ج) $\frac{١}{\text{جا س}}$ د) $\frac{١}{\text{جتا س}}$

(٣) $\int$ س^{٢} (٢ س^{٣} + ٨)^{٤} ﻫ س =

أ) $\frac{١}{٣٠}$ (٢ س^{٣} + ٨)^{٥} + ث ب) $\frac{١}{٦}$ (٢ س^{٣} + ٨)^{٥} + ث

ج) (٢ س^{٣} + ٨)^{٥} + ث د) $\frac{١}{٢٠}$ س^{٤} (٢ س^{٣} + ٨)^{٥} + ث

(٤) إذا كان د(س) = $\frac{١}{\text{س} + ١}$ فأوجد د$'$(١).

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) - $\frac{١}{٤}$ ج) ١ د) -١

السؤال الثانى:

(١) فى $\triangle$ أ ب جـ إذا كان ظا أ = $\frac{٤}{٣}$ ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة ظا أ.

(٢) إذا كانت ص = (ع + ١)$^{\circ}$ ، ع = س^{٣} - ١ فأوجد $\frac{\text{ﻫ ص}}{\text{ﻫ س}}$ عندما س = ١

السؤال الثالث:

(١) إذا كان ص = $\left(\frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} - ٣}\right)^{\circ}$ فأوجد $\frac{\text{ﻫ ص}}{\text{ﻫ س}}$ عندما س = ١

(٢) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢س جا س جتا س عندما س = π

السؤال الرابع:

(١) أوجد: **أولاً:** $\int$ (س - ٣)$^{\circ}$ ﻫ س **ثانيًا:** $\int$ حا$^{\circ}$ س جتا س ﻫ س

(٢) من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج تقع قاعدته على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٣٢$^{\circ}$ ثم سار الراصد فى خط مستقيم أفقيًا ٥٠ مترًا نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢$^{\circ}$ أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

الاختبار العاشر — التفاضل وحساب المثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان د(س) = $\frac{١}{س}$ فأوجد: د$'$ (١) =

أ ١ ب صفر ج -١ د ٢

(٢) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا(\frac{\pi}{٤} + هـ) - جا\frac{\pi}{٤}}{هـ}$ =

أ $\frac{جا هـ}{هـ}$ ب جا هـ ج جتا هـ د جتا $\frac{\pi}{٤}$

(٣) $\int$ (س + ٢) (س − ٢) ء س =

أ س + ٤ + ث ب $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٤ س + ث ج س^{٣} - ٤س + ث د (س^{٣} - ٤)^{٢} + ث

(٤) جتا ٧٠° جتا ١٠° - جا ٧٠° جا ١٠° =

أ جتا ٨٠ ب جا ٨٠ ج جتا ٦٠ د جا ٦٠

السؤال الثاني:

(١) حل المعادلة: جتا ٢ س + جا س = صفر ، س ∈]٠ ، ٢ π[

(٢) أوجد $\int$ س (س^{٢} + ٥)^{٤} ء س

السؤال الثالث:

(١) اذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ & \text{لكل } س \geq ٢ \\ ٢أ س - ٣ب & \text{لكل } س < ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ، فأوجد قيمتي أ ، ب

(٢) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها يساوى ٢٥° ، ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٨٠ مترًا ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخري فوجد أن قياسها ٤٥° ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

السؤال الرابع:

(١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $\frac{٣س + ١}{٢ س - ١}$ والتى يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم ٥س + ص - ٦ = ٠

(٢) أوجد النقط التي تقع على المنحنى: ص = س^{٢} - ٤س والتي يكون عندها المماس للمنحنى.

أ موازيًا للمحور السيني ب عموديًا على المستقيم ٢ص = س + ٣

إجابات بعض التمارين

الوحدة الأولي: المتتابعات والمتسلسلات

إجابة بعض تمارين (١ - ٣)

(٥) ٢٠ (٦) ٢٨ (٧) ٨٥ - ٤ ن
(٨) ١٠ (٩) ١٦ (١٠) جـ
(٢١) المتتابعة هى (٧، ١٢، ١٧،....) ن = ١٤ ، ن = ٢٠
(٢٢) ن = ١٠ ، المتتابعة هى (٣، ٧، ١١،...)
(٢٣) المتتابعة هى (٩، ١٢، ١٥،...)

إجابة بعض تمارين (١ - ٤)

(٣) ٣٥ (٤) ٩٠ (٥) ٢٠٠
(٦) ٢٤٣ (٧) جـ (٨) جـ
(٩) أ (١٠) ب

إجابة بعض تمارين (١ - ٥)

(١) ١٦٢ (٢) $(-٢)^{٣}$ ن$^{-١}$
(٣) ١ (٤) ٨ ±
(٥) ٢٥ (٦) $\frac{أ + جـ}{٢}$
(٧) ء (٨) ب
(٩) ب (١٠) أ

إجابة بعض تمارين (١ - ٦)

(١) أ (٢) جـ (٣) جـ
(٤) جـ (٥) أ

الوحدة الثانية: التباديل والتوافيق

إجابة بعض تمارين (٢ - ١)

(١) د (٢) جـ (٣) د
(٤) $٣^{٣} = ٢٧$ (٥) ٦

إجابة بعض تمارين (٢ - ٢)

(١) د (٢) ب (٣) أ
(٤) د (٥) جـ (٦) جـ
(٧) ب (٨) ٦ (٩) ١٦
(١٠) $ل_{٢}^{٤} = ١٢$
(١٤) أ $ل_{١}^{٦} = ٦$ ب $ل_{٢}^{٦} = ٣٠$
(١٩) $ل_{٣}^{١٠} = ٧٢٠$
(٢٠) $ل_{٣}^{٨} = ٣٣٦$

إجابة بعض تمارين (٢ - ٣)

(٥) ١٠ (٦) ٩ (٧) ١٥
(٨) $ق_{٥}^{٥} + ق_{٤}^{٥} + ق_{٣}^{٥} = ١٦$
(٩) $ق_{٣}^{١٠} \times ق_{٢}^{٨} = ٣٣٦٠$
(١١) أ $ق_{٢}^{٨}$ ب $ن_{٣}^{٩}$ جـ $ق_{٤}^{١٠}$
د $ق_{٠}^{٨}$

إجابة بعض تمارين العامة

(١) $ل_{٢}^{٤} = ٤ \times ٣ = ١٢$
(٢) $٣^{٩} = ٧٢٩$
(٥) ب (٦) جـ (٧) جـ
(٨) أ (٩) ب (١٠) د
(١٧) ن = ٥ (١٨) $ق_{١}^{٧} \times ق_{٢}^{٥} = ٧ \times ١٠ = ٧٠$
(١٩) ١٢ (٢٠) $ل_{٢}^{١٢} = ١٣٢$

إجابة اختبار تراكمى

(١) د (٢) جـ
(١٠) أ $\frac{١}{١٠٠}$ ب ١٠ جـ $\frac{١}{٢٠}$
د ٩٦ هـ ٢٤
(١١) $ق_{٢}^{٦} = ١٥$
(١٢) أ ن = ٦ ب ن = $\frac{٥}{٢}$ جـ ن = ٨
د ن = ٦ هـ ن = ١
و ن = ٤

الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

إجابة بعض تمارين (٣ - ١)

(١) ب (٢) د
(٣) د (٤) أ
(٦) أ معدل التغير = $٦(٢)^{٢} = ٢٤$
ب معدل التغير = - ٢
(٧) معدل التغير = $\frac{١}{٤}$
(٨) معدل التغير = ١٦
(٩) معدل تغير فى الحجم = ٦١٦

إجابة بعض تمارين (٣ - ٢)

(١) د(٣) = ٦ = ميل المماس للمنحنى عند النقطة (٣، ٤)
(٢) د(- ١) = ١ ، ل = ظا$^{-١}$ ١ = ٤٥°
(٣) أ $د(س) = \frac{٣}{\sqrt{٢س + ١}}$
ب $د(س) = \frac{-١}{س^{٢}}$

إجابة بعض تمارين (٣ - ٣)

(١) $\frac{-٣}{س^{٤}}$ (٢) صفر
(٣) $\frac{١}{\sqrt{٢س}}$ (٤) $\frac{-١}{\sqrt[٣]{٣س^{٤}}}$
(٥) ١٠ س + ٣ (١٧) $\frac{٧}{(س + ٥)^{٢}}$
(١٨) أ ٦٥ ب ١
جـ $\frac{٥٦}{٩}$ د ٢٤٠
هـ ١٢٠٠ و $-\frac{١}{٤}$
(٢٠) أ صفر ب ٣٢
(٢٢) $\frac{ء ص}{ء س} = [ص^{ن}] = ن ص^{ن - ١} \frac{ء ص}{ء س}$

إجابة بعض تمارين (٣ - ٥)

(١) أ د(س) ب $\frac{-٣}{\sqrt{٢}}$ جـ -٣
د ٩ هـ ١
و ٢ س - ص - ٣ = ٠
(٢) $\frac{\pi}{٤}$ (٣) ١٩´١٠١°
(٦) معادلة المماس هى: ص = - ٣ (س + ١)
(٩) ميل الأول = ٣ ، ميل الثانى = $-\frac{١}{٣}$

إجابة بعض تمارين (٣ - ٦)

(٢) ١٠ $\sqrt{س} + \frac{٢}{١٥}\sqrt{س^{٣}} + ث$
(٣) ٢ $س^{٢}$ - س جا $\frac{\pi}{٣} + ث$
(٤) $\frac{١}{٤}(س + ٥)^{٤} + ث$
(٥) $\frac{١}{٢٤}(س^{٢} - ٤س - ٧)^{١٢} + ث$
(٦) ∫ جتا $(س + \frac{\pi}{٤})$ ء س
= جا $(س + \frac{\pi}{٤}) + ث$

إجابة بعض التمارين عامة

(٥) د (٦) جـ (٧) أ
(٨) أ غير قابلة للاشتقاق لعدم الاتصال
ب قابلة للاشتقاق

إجابة اختبار تراكمى

(٤) ب (٥) ب (٦) جـ
(٩) ٨ س + ص - ١٢ = صفر
(١١) أ = ١ ، ب = ٣

الوحدة الرابعة: حساب مثلثات

إجابة بعض تمارين (٤ - ١)

(١) ارتفاع البرج ≃ ٣٢ متر
(٢) ارتفاع البرج ≃ ٦٥ متر
(٣) أ ب ≃ ٦٤ متر
(٤) ١١١ مترًا
(٥) سرعة السفينة ≃ ١٩ كم/س
(٦) ارتفاع التل ≃ ٣٤ متر

إجابة بعض تمارين (٤ - ٢)

(٣) صفر (٤) جا س (٥) ١
(٦) أ (٧) جـ (٨) أ
(٩) ى (١٠) أ (١١) د
(١٢) ٢ جا أ جاب
(١٣) ٢ جتا أ جا ب (١٤) صفر
(١٥) جتا (٤٠ + س)
(١٦) $\frac{-21}{221}$ ، $\frac{-140}{221}$ ، $\frac{-220}{21}$ (١٧) $\frac{1}{5}$

إجابة بعض تمارين (٤ - ٣)

(١) جـ (٢) أ (٣) جـ
(٤) جـ (٥) د
(٨) $\frac{120}{169}$ ، $-\frac{119}{169}$ ، $-\frac{120}{119}$ ، $\frac{\sqrt{13}\,3}{13}$
(٩) $\frac{5}{13}$ ، $\frac{12}{13}$

إجابة بعض تمارين (٤ - ٤)

(١) $\sqrt{3}\,9$ سم^2 (٢) ٥٠سم^2
(٣) ٦ سم^2 (٥) ٥٤ سم^2
(٦) $\sqrt{3}\,80$ سم^2 (٧) ١٤٣,٩٩٧سم^2
(٩) أ (١٠) جـ (١١) جـ
(١٤) ٦٤سم^2 (١٥) $6+2\sqrt{21}$ سم^2
(١٨) ١٠٣,١٨سم^2
(١٩) أ $\sqrt{3}\,80$ سم^2 ب ٩٠ سم^2
جـ ٣٨٤ سم^2 د $\frac{\sqrt{39}\,15}{4}$
(٢٠) $\sqrt{3}\,1500$ (٢١) $\sqrt{2}\,20$

إجابة بعض التمارين عامة

أولًا مسائل زوايا الارتفاع والانخفاض

(٣) ≈ ١٣ مترًا (٤) ≈ ٨٧ كم
(٥) ≈ ٧٠٥,٢٢ أمتار
(٦) ≈ ٢٣,٥٣٠ كم

ثانيًا: مسائل على الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياس زاويتين:

(٣) أ ١ ب ١
(٤) $\frac{-120}{169}$ ، $\frac{-119}{169}$ (٥) $\frac{8}{9}$
(٨) $\frac{1}{3}$
(١٠) $\frac{-16}{63}$ ، $\frac{24}{25}$

ثالثًا: مسائل على صيغة هيرون

ب $\sqrt{3}\,30\,8$ سم^2
جـ ٢٢٦٢٧,٤٢ سم^2
(٢) $\sqrt{3}\,255$ سم^2
(٣) ٢٤٠٠سم^2
(٤) ٣٠٦ سم^2

إجابة اختبار تراكمى

أولًا: أسئلة الاختيار من متعدد

(١) جا ٥ س (٢) $\frac{\text{٥ جا ب}}{\text{جا أ}}$
(٣) $-\frac{1}{8}$ (٤) ١٢٠°

ثانيًا: أسئلة ذات إجابات قصيرة

(٥) ٢,٥سم (٦) ٦ : ٤ : ٣
(٧) ١٢٠° (٨) ١

ثالثًا: أسئلة ذات إجابات طويلة

(١٢) ع ≈ ١٢,٦سم ، ≈ ١٩١سم^2
(١٤) ≈ ٤,٧٣ كم
(١٥) $\sqrt{15}\,9$ سم^2

اختبارات عامة

أولًا: اجوبة اختبارات الجبر

الاختبار الاول

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) جـ (٣) جـ (٤) د

السؤال الثالث:

(١) ١٢٦٠
(٢) ٨

السؤال الرابع:

(١) ٧١٠٧١
(٢) ٣٠

الاختبار الثاني

السؤال الأول:

(١) أ (٢) أ (٣) ب (٤) جـ

السؤال الثاني:

(١) ٣ = (٢) ح ١٧ ، حـ ن = ١٢٠٨

السؤال الثالث:

(١) ٢٤
(٢) م.هـ (٨، ٤، ٢،...) ، حـ∞ = ١٦

السؤال الرابع:

(٢) ١١٠٠

الاختبار الثالث

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) د (٣) جـ (٤) أ

السؤال الثاني:

(١) ر = ٥ أو ر = ٢ (٢) ن = ١٧

السؤال الثالث:

(١) ٣٧
(٢) م.هـ (٣٦ ، ٢٤، ١٦، حـ ٧ = $\frac{8236}{81}$

السؤال الرابع:

(١) ١٠٦٤
(٢) لايمكن للشركة تخزين ٨٠٠ طن ، فقط يمكنها تخزين ٧٦٣ طن تقريبًا.

الاختبار الرابع

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) ب (٣) جـ (٤) ب

السؤال الثاني:

(١) ن = ٩ ، م = ٢

(٢) ن = ٣٦، م.ح (٨٣، ٧٩، ٧٥،...، -٥٧)

السؤال الثالث:

(١) ن(ص) = °ل٢ = ٢٠ ، ن(ع) = °ق٢ = ١٠

(٢) م.هـ (١، ٣، ٩،) ، حـ١٠ = ٢٩٥٢٤

السؤال الرابع:

(٢) ٣١٩ متر.

الاختبار الخامس

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) جـ (٣) ب (٤) ب

السؤال الثاني:

(١) ٤

(٢) (٤، ٧، ١٠،...، ٨٨، ٩١) ، حـ ٣٠ = ١٤٢٥

السؤال الثالث:

(١) ٢٢

(٢) م.هـ (١٨، ٦، ٢،...) حـ∞ = ٢٧

م.هـ (٦، ٢، ١٨،...)

السؤال الرابع:

(١) مجموعة الأوساط $\frac{٩٨٤١}{٢٤٣}$

(٢) ٨٢٠٠

ثانيًا: اجوبة اختبارات التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار السادس

السؤال الأول:

(١) ب (٢) جـ (٣) ب (٤) أ

السؤال الثالث:

(١) -٦

السؤال الرابع:

(١) (٤، ١)، (٢، -١)

(٢) ارتفاع البرج ≃ ١٣٧،٣٧ متر

الاختبار السابع

السؤال الأول:

(١) د (٢) جـ (٣) ب (٤) د

السؤال الثاني:

(١) ٣

(٢) $\frac{٦٥}{٦٣}$

السؤال الرابع:

(١) تقريبًا ١٠٧,٧٩ كم

(٢) ١٥

الاختبار الثامن

السؤال الأول:

(١) د (٢) د (٣) ب (٤) جـ

السؤال الثاني:

(١) $\frac{-١}{٤}$ (٢) $\frac{-٧}{٩}$

السؤال الثالث:

(٢) ١٠

السؤال الرابع:

(٢) ٢٠٩٤

الاختبار التاسع

السؤال الأول:

(١) د (٢) ب (٣) أ (٤) ب

السؤال الثاني:

(١) ظا أ = $\frac{١}{٢}$ أو ظا أ = -٢

(٢) ١٥

السؤال الثالث:

(١) $\frac{-١٥}{٢}$

السؤال الرابع:

(٢) ١٠٢ متر

الاختبار العاشر

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) د (٣) ب (٤) أ

السؤال الثاني:

(٢) م.ح = $\{\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi٧}{٦}، \frac{\pi١١}{٦}\}$

السؤال الثالث:

(١) أ = ب = ٢

(٢) ٧٠ متر

السؤال الرابع:

(١) (٠، -١) ، (١، ٤)

(٢) أ (٢، -٤)

ب (١، -٣)